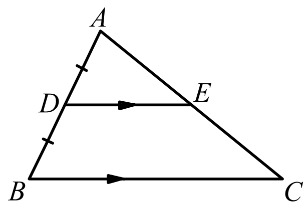
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Orta Taban

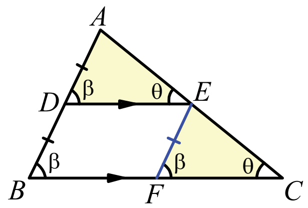
Yazımıza, bir ders boyunca ne yapacağımızı anlatan asıl teoremle başlıyoruz. Kulak kesilin lütfen!

Teorem. *Bir üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından üçgenin ikinci kenarına paralel olacak şekilde geçen doğru, üçgenin üçüncü kenarının orta noktasından geçer.*



Yani üstteki şekle göre; $[DE] \parallel [BC]$ *ve* $|AD| = |DB|$ *ise* $|AE| = |EC|$ *olur* diyor.

Kanıt: $DE \parallel BC$ olduğundan yöndeş açıların eşliği gereğince ADE ile ABC ve DEA ile BCA açıları eş olurlar.

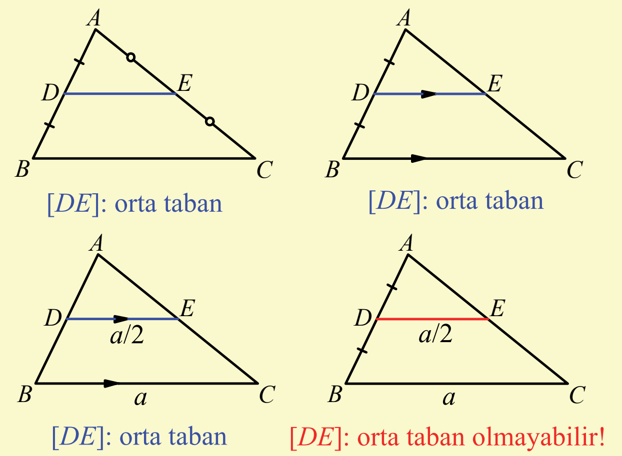


$m(ADE) = m(ABC) = \beta$ ve $m(DEA) = m(BCA) = \theta$ diyelim. Şimdi E'den AB doğrusuna bir paralel çizelim. Bu doğru, BC'yi F'de kessin. $BFED$ dörtgeninin karşılıklı kenarları birbirlerine paralel olduğundan yani bir paralelkenar olduğundan daha önce kanıtladığımız üzere karşılıklı kenarları eş olur. O halde $|AD| = |DB| = |EF|$ eşitliğinden bahsedilebilir. Diğer yandan $EF \parallel AB$ olduğundan EFC açısının ölçüsü de β olur. Bu da ADE ile EFC üçgenlerinin K.A.A. Eşliği gereğince eş olduklarını işaret eder. Bu eşlik aradığımız $|AE| = |EC|$ eşitliğine yeter de artar bile.

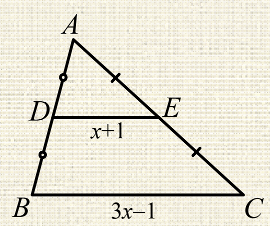
Yukarıdaki $[DE]$ doğru parçası gibi, bir üçgenin herhangi iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçalarına **orta taban** denir.

Orta taban şekilden de görüleceği üzere daima tabana paraleldir. Diğer yandan ADE ile EFC üçgenlerinin eşliği $|DE| = |BF| = |FC|$ eşitliğini doğuracağından orta tabanın boyunun, tabanın boyunun yarısı olduğunu anlarız.

Neden?



Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| = |DB|$
$|AE| = |EC|$
$|DE| = x + 1$ br
$|BC| = 3x - 1$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

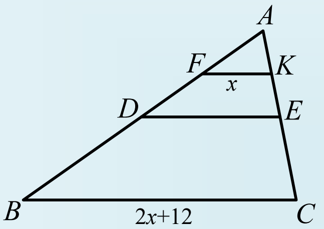
Çözüm: D ve E noktaları, üzerinde bulundukları kenarların orta noktaları olduğu için $[DE]$ orta tabandır. Orta tabanın boyu, tabanın boyunun yarısı olduğundan

$$3x - 1 = 2(x + 1)$$

eşitliği çözülürse $x = 3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

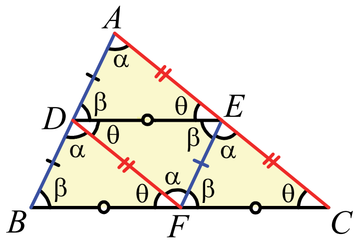
1.



$[DE]$; ABC üçgeninde,
$[FK]$; ADE üçgeninde
orta taban ise x kaçtır?

6

Bir üçgenin üç tane orta tabanı vardır.



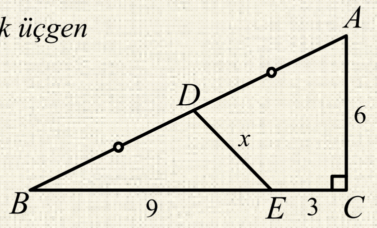
Bu orta tabanların belirttiği üçgene asıl üçgenin **orta üçgeni** denir.

Orta üçgenin kenarlarının asıl üçgene paralel olduğuna ve kenarlarının asıl üçgenin kenarlarının yarısı kadar olduğuna dikkat ediniz. Bunun yanında ADE, DBF, EFC ve FED üçgenlerinin eş olması da kayda değer bir durumdur.

Şu ana kadar çözdüğümüz sorularda orta taban hâlihazırda çizilmiş durumdaydı. Bazen orta tabanın çizilmesi bizden beklenir. Bunun için de gözümüzün hemen bir orta nokta araması gerekir. Orta noktadan diğer iki kenardan birine paralel çizersek soru neredeyse çözülmüş olur.

Gürkan Gülcemal, orta nokta görüldüğünde orta taban çizilmesi gerektiğini şu sloganla veriyor:
‘‘*ON*’u gördün mü *OT*’u çiz!’’

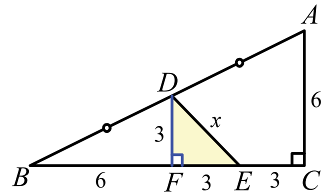
Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$BC \perp CA$
$|AD| = |DB|$
$|BE| = 9$ br
$|EC| = 3$ br
$|CA| = 6$ br



olduğuna göre $|DE|$ kaç br dir?

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

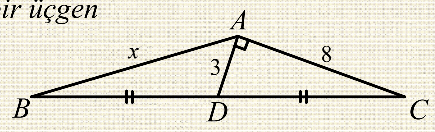
Çözüm: Ne zaman orta nokta görürsek aklımıza ilk olarak ‘orta taban’ gelmelidir. Bu sebeple hemen D’den BC’ye dik indirelim. Dikme ayağı F olsun.



D orta nokta olup $DF \parallel AC$ olduğundan $[DF]$ orta tabandır. O halde hem $|DF| = 3$ br olmalı hem de $|BF| = |FC|$ olmalıdır. Buradan $|BF| = 6$ br ve $|FE| = 3$ br çıktığından, DFE üçgeninde Pisagor Teoremi gereğince $x^2 = 3^2 + 3^2$ eşitliğinden $x = 3\sqrt{2}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

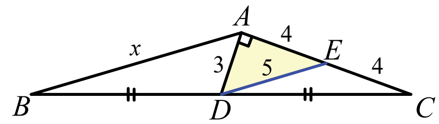
Örnek. *ABC bir üçgen*
$CA \perp AD$
$|BD| = |DC|$
$|DA| = 3$ br
$|AC| = 8$ br



olduğuna göre $|BA|$ kaç br dir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 6 E) 5

Çözüm 1: Sorudaki orta nokta bize yine ilk olarak orta tabanı hatırlattı. D’den BA’ya paralel olarak geçen doğru $[AC]$’yi ortalayacaktır.

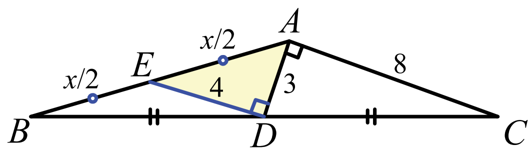


Bu yüzden $|AE| = |EC| = 4$ br olur. DAE dik üçgeninde Pisagor Teoremi’nden $|DE| = 5$ br olur. $[DE]$ doğru parçası ABC üçgeninde orta taban olduğundan $[AB]$’nin boyu $[DE]$’nin boyunun 2 katıdır. Yani $|BA| = 10$ br olmalıdır.

Doğru cevap: B.

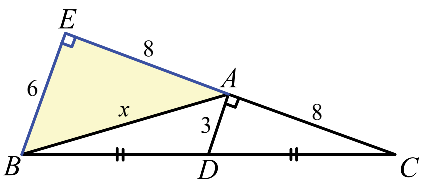
Bu bölümün tashihini yapan *Mehmet Güleşen* Hocam, ‘çok önemli bu soru kalıbına bir tek bu çözüm yakışmış mı yahu’ diyerek çözümlerini sıraladı. Ne diyeyim ben, elleri dert görmesin!

Çözüm 2: D noktasından sağa doğru orta taban çizebileceğimiz gibi, sola doğru da çizebiliriz.



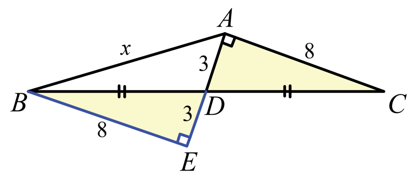
D'den CA'ya paralel çizilen doğru AB'yi E'de kessin. [DE] bal gibi orta taban oldu. O zaman, $|BE| = |EA| = x/2$ br oldu. Orta taban, tabana paralel olacağından $AD \perp DE$ ve orta taban tabanın yarısı olacağından $|DE| = 4$ br olur. ADE dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa $x/2 = 5$ yani $x = 10$ bulunur.

Çözüm 3: [CA]'yı A yönünde kendi boyu kadar uzatırsak [DA] kenarı [CB] ve [CE] kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğinden orta taban olur.



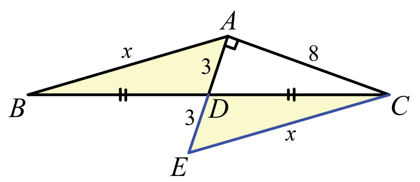
O halde $BE \perp EC$ ve $|EB| = 6$ br olur. AEB dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $x = 10$ bulunur.

Çözüm 4: Bu sefer [AD]'yi D yönünde kendi boyu kadar uzatacağız. Vardığımız nokta yine E olsun.



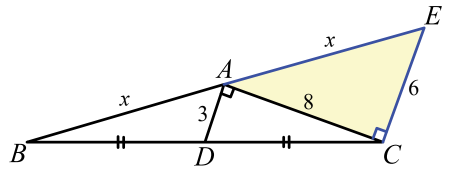
ADC ile EDB üçgenlerine odaklanırsanız D açıları eş olup bu açının yan kenarları da eştir. O halde bu üçgenler eştir. Bu yüzden $BE \perp EA$ ve $|BE| = 8$ br diyoruz. Geriye sadece BEA dik üçgeninde Pisagor Teoremi yazmak kaldı. Yazanlar $6^2 + 8^2 = x^2$ eşitliğinden x'i 10 bulur.

Çözüm 5: [AD]'yi D yönünde kendi boyu kadar uzatmıştık ya, sola değil sağa gitsek de olur.



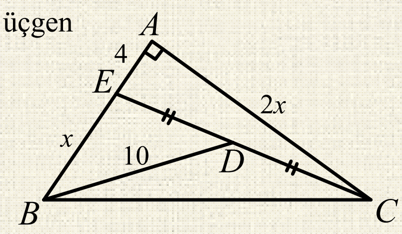
Bu sefer ADB ile CDE üçgenlerine odaklanırsanız, D açıları eş olup bu açının yan kenarları da eş diye, bu üçgenlerin eş olduğunu anlarsınız. Bu yüzden $|DE| = 3$ br ve $|EC| = x$ br olur. Geriye sadece CAE dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni yazmak kaldı. x tabii ki yine 10 çıkacak.

Çözüm 6: Sıra [BA]'yı uzatmaya geldi. [BA]'yı A yönünde kendi boyu kadar uzatıp, vardığımız noktaya E diyelim.



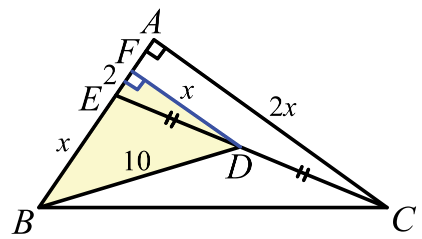
[BC] ve [BE]'nin orta noktalarını birleştirdiği için, bu sefer [DA] orta taban oldu. O zaman $AC \perp CE$ ve $|CE| = 6$ br oldu. Son olarak ACE dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden de $x = 10$ bulundu.

Örnek. ABC dik üçgen
$CA \perp AB$
$|ED| = |DC|$
$|AE| = 4$ br
$|BD| = 10$ br
$|AC| = 2x$ br
$|EB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm: $|ED| = |DC|$ olması aklımıza orta tabanı getiriyor. Bu amaçla D'den AB'ye dik indireceğiz. Bu dikmenin ayağına F diyelim.



Bu durumda, CAE üçgeninde [FD] orta taban olduğundan hem $|EF| = |FA| = 2$ br hem de $|FD| = x$ br olur. Şimdi DFB dik üçgeninde Pisagor Teoremi'yle sonuca gideceğiz.

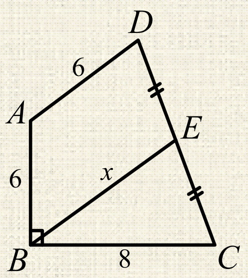
$$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$$
$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$
$$x^2 + 2x - 48 = 0$$
$$(x + 8)(x - 6) = 0$$

denkleminden $x = 6$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

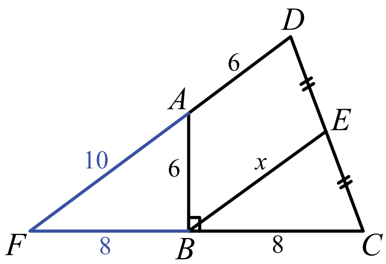
Bundan sonraki sorularımız da 'Meğer bu çizilmiş doğru parçası orta tabanmış da haberim yokmuş!' soruları…

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$AB \perp BC$
$AD \,//\, BE$
$|CE| = |ED|$
$|DA| = |AB| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre
$|BE|$ kaç br dir?



A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: $|DE| = |EC|$ eşitliği aklımıza orta tabanı getiriyor. Bu amaçla $[DA]$'yı A yönünde $[BC]$'yi de B yönünde uzatıp kesişmelerini sağlayalım. Kesişim noktasına da F diyelim.



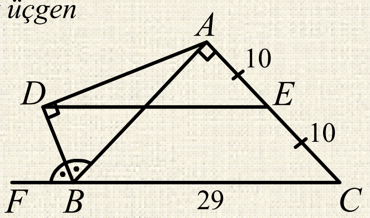
Bu durumda $|DE| = |EC|$ ve $BE \,//\, DF$ verilerinden DFC üçgeninde $[BE]$'nin orta taban olduğunu anlarız. O halde $|FB| = |BC| = 8$ br dir. ABF dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|AF| = 10$ br olur. Sonuçta

$$\begin{aligned}|FD| &= |FA| + |AD| \\ &= 10 \text{ br} + 6 \text{ br} \\ &= 16 \text{ br}\end{aligned}$$

bulunduğundan $|BE| = 8$ br olmalıdır.

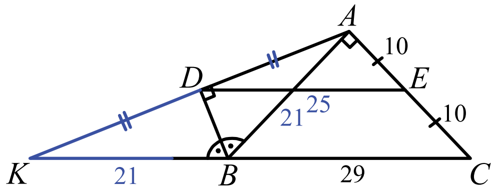
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
C, B, F doğrudaş
$m(FBD) = m(ABD)$
$|AE| = |EC| = 10$ br
$CA \perp AB$
$AD \perp DB$
$|BC| = 29$ br
olduğuna göre $|DE|$ kaç br dir?



A) 20 B) 22,5 C) 24,5 D) 25 E) 26

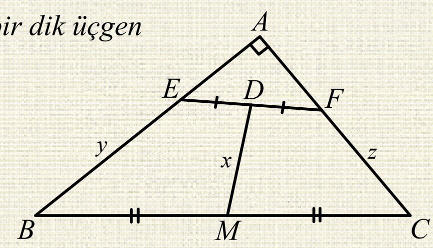
Çözüm: Önce CAB dik üçgeninde uzunluğu eksik olan kenarın uzunluğunu yazalım. Bu üçgen meşhur 20-21-29 dik üçgeni olduğundan $|AB| = 21$ br dir.



Şimdi $[AD]$'yi D yönünde $[BC]$'yi de B yönünde uzatarak kesişmelerini sağlayalım. Kesişim noktasına da K diyelim. ABK üçgeninde $[BD]$ hem açıortay hem de yükseklik olduğundan ABK ikizkenar olup $[BD]$ aynı zamanda da kenarortay olmalıdır. Hem de $|KB| = 21$ br dir. O halde $[DE]$ doğru parçası AKC üçgeninde orta tabandır. $|KC| = 21$ br + 29 br = 50 br olduğundan $|DE| = 25$ br olarak bulunur.

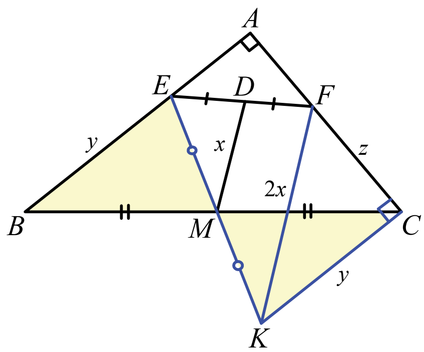
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$|BM| = |MC|$
$|ED| = |DF|$
$|DM| = x$ br
$|EB| = y$ br
$|FC| = z$ br
olduğuna göre x, y ve z arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y + z = 2x$ B) $y + z = 3x$ C) $x + z = 2y$ D) $y^2 + z^2 = x^2$ E) $y^2 + z^2 = 4x^2$

Çözüm: $[EM]$'yi çizip M yönünde kendi boyu kadar uzatalım.

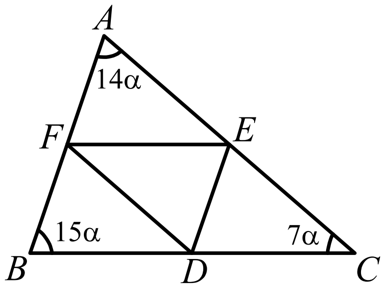


Hem $|BM| = |MC|$ hem de $|EM| = |MK|$ olduğundan EMB ile KMC üçgenleri eştir. O halde $|KC| = y$ br olur. Bu eşlik aynı zamanda $KC \,//\, BE$ olmasını gerektirdiğinden KCA açısı dik olur. Şimdi $[KF]$'yi çizelim. FEK üçgeninde M ve D bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan $[DM]$ bu üçgene ait bir orta tabandır. O halde $|FK| = 2x$ br olur. FCK dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $y^2 + z^2 = 4x^2$ bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST

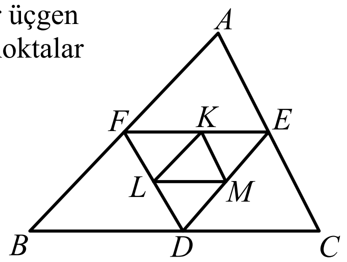
2.
ABC bir üçgen
DEF orta üçgen
$m(A) = 14\alpha$
$m(B) = 15\alpha$
$m(C) = 7\alpha$
olduğuna göre $m(FDE)$ kaç derecedir?



A) 60 B) 65 **C)** 70 D) 75 E) 80

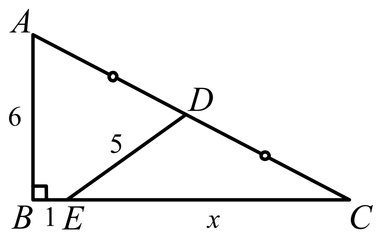
3.
ABC, DEF, KLM birer üçgen
D, E, F, K, L, M orta noktalar
Çevre(ABC) = 32 br

olduğuna göre DEF ve KLM üçgenlerinin çevreleri toplamı kaç br dir?



A) 12 B) 16 C) 20 **D)** 24 E) 32

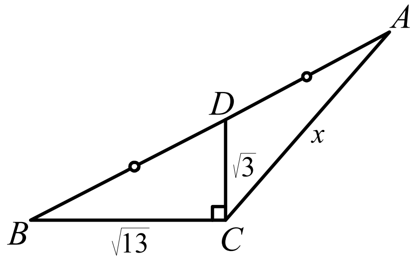
4.
ABC bir üçgen
$AB \perp BC$
$|AD| = |DC|$
$|AB| = 6$ br
$|BE| = 1$ br
$|ED| = 5$ br



olduğuna göre $|EC|$ kaç br dir?

A) 15 B) 13 C) 11 **D)** 9 E) 7

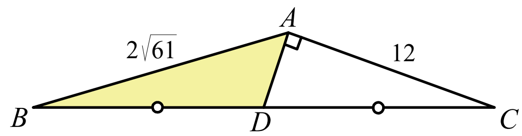
5.
ABC bir üçgen
$BC \perp CD$
$|AD| = |DB|$
$|BC| = \sqrt{13}$ br
$|CD| = \sqrt{3}$ br
$|CA| = x$ br



olduğuna göre x kaçtır?

A) 3 B) 4 **C)** 5 D) 6 E) 7

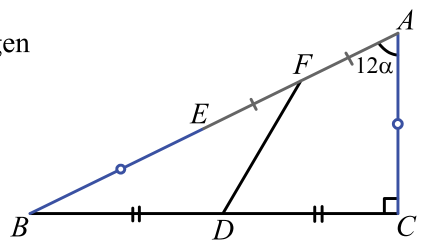
6.
ABC bir üçgen, $CA \perp AD$, $|BD| = |DC|$



$|CA| = 12$ br, $|AB| = 2\sqrt{61}$ br olduğuna göre $|ABD|$ kaç br^2 dir?

A) 30 B) 36 C) 42 D) 48 E) 60

7.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|CA| = |BE|$
$|BD| = |DC|$
$|EF| = |FA|$
$m(A) = 12\alpha$

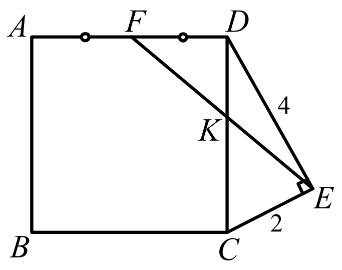


olduğuna göre $m(DFB)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3α B) 4α C) 5α **D)** 6α E) 7α

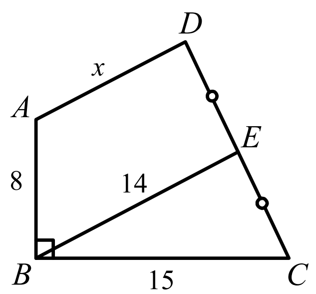
[Mehmet GÜLEŞEN]

8.
ABCD bir kare
CED bir dik üçgen
$CE \perp ED$
$|CE| = 2$ br
$|ED| = 4$ br
$|AF| = |FD|$
olduğuna göre
$|EF|$ kaç br dir?



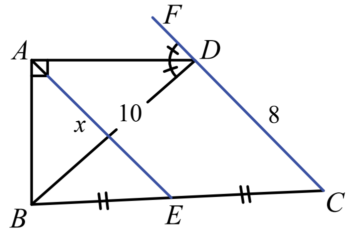
A) 5 B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}$ **D)** $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{37}$

9.
ABCD bir dörtgen
$AB \perp BC$, $AD \parallel BE$
$|CE| = |ED|$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 15$ br
$|BE| = 14$ br
olduğuna göre
$|DA|$ kaç br dir?



A) 12 **B)** 11 C) 10 D) 9 E) 8

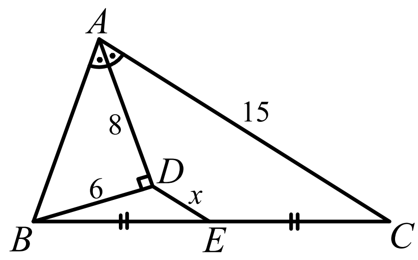
10.
ABCD bir dörtgen
$DA \perp AB$
$|BE| = |EC|$
C, *D*, *F* doğrudaş
$m(BDA) = m(FDA)$
$|BD| = 10$ br
$|DC| = 8$ br



olduğuna göre $|AE|$ kaç br dir?

A) 8 **B)** 9 C) 10 D) 11 E) 12

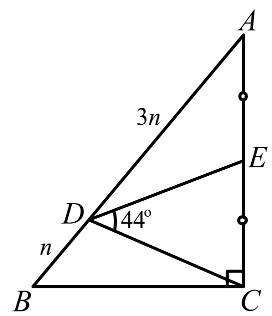
11.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$BD \perp DA$
$|BE| = |EC|$
$|BD| = 6$ br
$|AD| = 8$ br
$|AC| = 15$ br



olduğuna göre $|DE|$ kaç br dir?

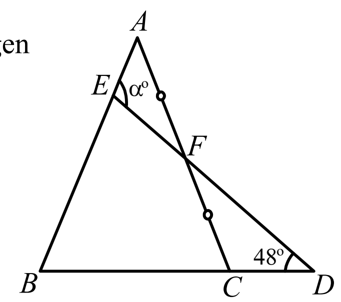
A) $\frac{9}{2}$ B) 4 C) $\frac{7}{2}$ D) 3 **E)** $\frac{5}{2}$

12.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|AE| = |EC|$
$|AD| = 3 \cdot |DB| = 3n$ br
$m(CDE) = 44°$
olduğuna göre
$m(BCD)$ kaç derecedir?



A) 11 **B)** 22 C) 24 D) 30 E) 33

13.
ABC ve *EBD* birer üçgen
$AC \cap DE = \{F\}$
$|AF| = |FC|$
$|BC| = 2 \cdot |EF|$
$m(D) = 48°$
$m(DEA) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



A) 102 B) 105 C) 108 **D)** 114 E) 120