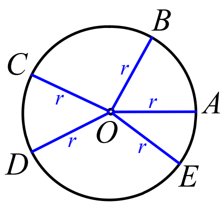
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Çemberin Tanımı

Bir düzlemde, sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan tüm noktaların kümesine **çember** denir. Sabit noktaya **çemberin merkezi**, eşit uzaklığa ise **çemberin yarıçapı** denir.

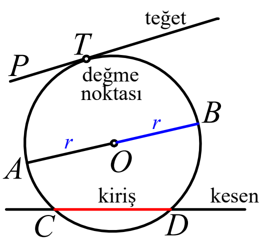


Yani üstteki şekle göre, çemberin merkezi O noktası, yarıçapı ise

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = |OE| = r \text{ br.}$$

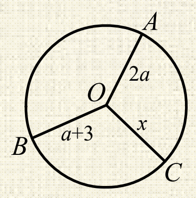
Bir çember üzerindeki farklı iki noktadan geçen doğruya **kesen**, bu kesenin çemberin üstünde ve iç bölgesinde kalan parçasına **kiriş** denir. Merkezden geçen kirişe ise **çap** denir. Çap en uzun kiriştir ve boyu yarıçapın iki katıdır. Yani çaptan daha uzun bir kirişin çizilmesine olanak yoktur.

Bir doğru çembere tek noktada değiyorsa doğruya **teğet** veya **teğet doğrusu** diyoruz. Çembere değdiği noktaya da **teğet değme noktası** diyoruz.



Şeklimizde CD kesendir, $[CD]$ kiriştir, $[AB]$ çaptır, PT teğettir, T değme noktasıdır, yarıçapın boyu $|OA| = |OB| = r$ br ve çapın boyu $|AB| = 2r$ br dir.

Örnek. *Yandaki çemberde O merkez olup A, B, C noktaları çember üzerindedir.*
$|OA| = 2a$ br
$|OB| = a + 3$ br
$|OC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

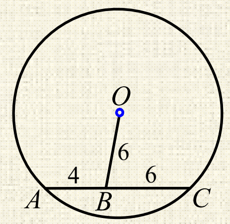
Çözüm: Çemberin tanımı gereği A, B, C noktalarının O noktasına olan uzaklıkları eşit olmalıdır.

$$2a = a + 3 = x$$

eşitliğinin ilk kısmından $a = 3$ bulunur, ki buradan da $x = 6$ olduğu anlaşılır.

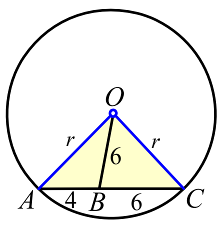
Doğru cevap: E.

Örnek. *O merkez*
$[AC]$ kiriş
$|AB| = 4$ br
$|OB| = |BC| = 6$ br
olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç br dir?



A) $2\sqrt{15}$ B) 8 C) $6\sqrt{2}$ D) 9 E) $2\sqrt{17}$

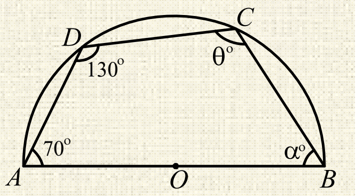
Çözüm: Çemberin tanımı gereği A ve C noktaları O'ya eşit uzaklıktadır. $|OA| = |OC| = r$ br diyelim.



OAC ikizkenar üçgeninde zarif Stewart Teoremi'ni kullanırsak; $6^2 = r^2 - 4{\cdot}6$ eşitliğinden $r = 2\sqrt{15}$ bulunur.

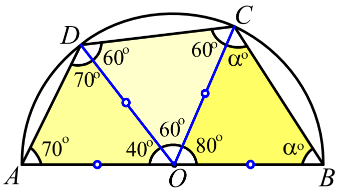
Doğru cevap: A.

Örnek. *O merkez*
$m(BAD) = 70°$
$m(ADC) = 130°$
$m(CBA) = θ°$
$m(CBA) = α°$
olduğuna göre
θ – α farkı kaçtır?



A) 70 B) 65 C) 60 D) 55 E) 50

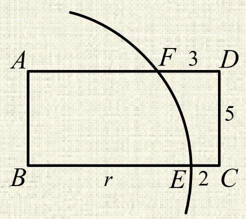
Çözüm: Derhal [*OD*] ve [*OC*] yarıçaplarını çizelim. Tanım gereği |*OA*| = |*OD*| = |*OC*| = |*OB*| olur.



|*OA*| = |*OD*| olduğundan *m*(*ODA*) = 70°, dolayısıyla *m*(*ODC*) = 60° olur. Bu da *ODC* eşkenar üçgen demektir. Şu durumda *m*(*COB*) = 80° bulunduğundan *OBC* ikizkenar üçgeninde α = 50 bulunur. Diğer yandan θ = 60 + α olduğundan fark 60'dır.

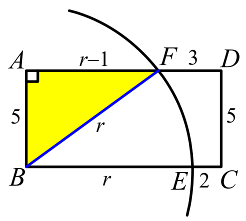
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABCD bir dikdörtgen*
Çember yayı B merkezli
|*EC*| = 2 br
|*CD*| = 5 br
|*DF*| = 3 br
|*BE*| = *r* br
olduğuna göre r kaçtır?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

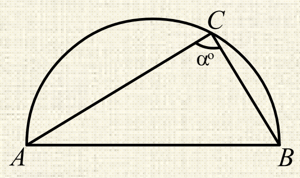
Çözüm: *F* ve *E* noktaları *B* merkezli çember üzerinde olduklarından tanım gereği |*BF*| = |*BE*| = *r* br olur.



Diğer yandan dikdörtgende karşılıklı kenar uzunlukları birbirlerine eşit olduğundan |*AF*| = *r* – 1 br ve |*AB*| = 5 br bulunur. Geriye sadece *FAB* dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni uygulamak kalıyor. O da yapılırsa *r* = 13 çıkar.

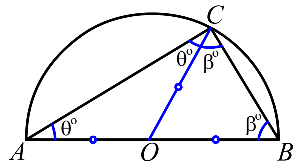
Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki* [*AB*] *çaplı yarım çemberde C yay üzerinde herhangi bir noktadır.*
$m(BCA) = α°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 90 B) 85 C) 80 D) 75 E) 70

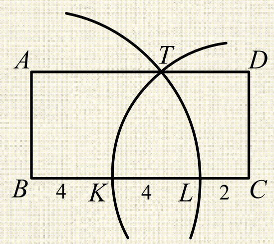
Çözüm: Çemberin merkezine *O* diyerek [*OC*]'yi çizelim. Muhteşem üçlü gereğince α = 90 bulunur.



Bunu göremeyenler, açı takibinden de bulabilir.

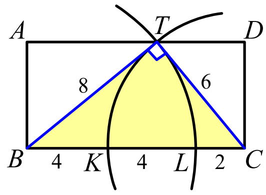
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABCD dikdörtgen*
B ve C merkezli çember yayları şekildeki gibi AD üzerindeki bir T noktasında kesişmekteler.
|*BK*| = |*KL*| = 4 br
|*LC*| = 2 br
olduğuna göre |*ABCD*| *kaç* br^2 *dir?*



A) 24 B) 30 C) 40 D) 48 E) 50

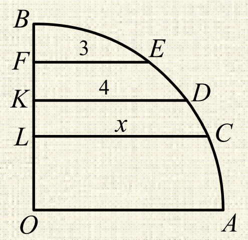
Çözüm: *T* ve *L* noktaları *B* merkezli çember yayı üzerinde olduklarından |*BT*| = |*BL*| = 8 olmalıdır. Diğer yandan *T* ve *K* noktaları *C* merkezli çember yayı üzerinde olduklarından |*CT*| = |*CK*| = 6 olmalıdır.



Dikkat edilecek olursa *CTB* üçgeninin kenar uzunlukları 6-8-10 br olarak bulundu. Demek ki *CTB* açısı dikmiş. *ABCD* dikdörtgeninin alanının da *CTB* üçgeninin alanının 2 katı olduğunu biliyoruz. O halde |*ABCD*| = 2·|*CTB*| = 6·8 = 48 br^2 olur.

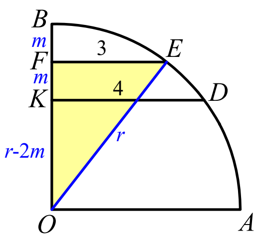
Doğru cevap: D.

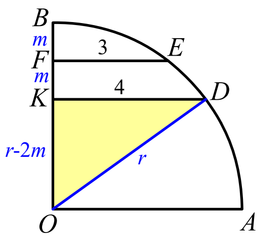
Örnek. *O merkezli çeyrek çember yayı*
FE // KD // LC // OA
$|BF| = |FK| = |KL|$
$|FE| = 3$ br
$|KD| = 4$ br
$|LC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{22}$ D) $\sqrt{23}$ E) $2\sqrt{6}$

Çözüm: $|BF| = |FK| = m$ br ve yarıçap r br olsun.





EFO ve *DKO* üçgenlerinde Pisagor Teoremi'ni uygulayacağız.

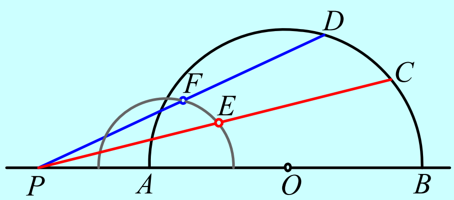
$$(r - m)^2 + 9 = r^2$$
$$(r - 2m)^2 + 16 = r^2$$

denklemleri ortak çözülürse $m = 1$ bulunur. O halde $|LO| = 2$ br olduğundan *CLO* dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa $x = \sqrt{21}$ bulunur.

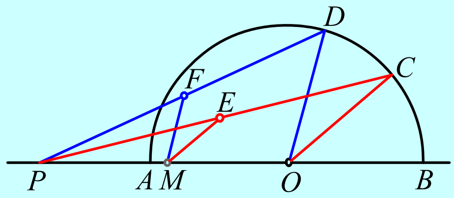
Doğru cevap: B.

Sadece çemberin tanımını kullanarak bazı köklü teoremleri bile kanıtlamak mümkün. İki örnek gösterip sorulara geçeceğiz, isteyen şimdiden geçebilir ☺

Orta Nokta Teoremi. *Bir çemberin çapının uzantısı üzerinde herhangi bir nokta alınsın. Bu nokta ile çemberin üzerindeki herhangi iki nokta birleştirilsin.*

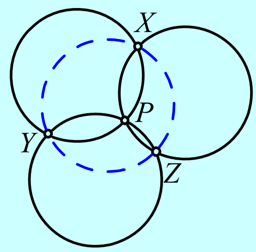


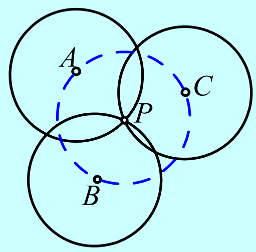
Bu doğru parçalarının orta noktalarından geçen ve merkezi büyük çemberle aynı doğru üzerinde bulunan küçük çemberin yarıçapı, büyük çemberin yarıçapının yarısıdır.



$[PO]$'nun orta noktası M olsun. *CPO* ve *DPO* üçgenlerinde orta taban özelliğinden $|OC| = 2|ME|$ ve $|OD| = 2|MF|$ olduğu ortada. Diğer yandan $|OD| = |OD|$ olduğundan $|ME| = |MF|$ olur. Demek ki M küçük çemberin merkeziymiş!

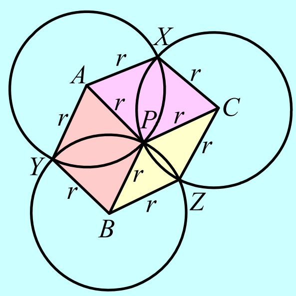
Johnson Teoremi. *Her biri eş ve r yarıçaplı üç farklı çember bir P noktasında kesişiyor olsunlar.*





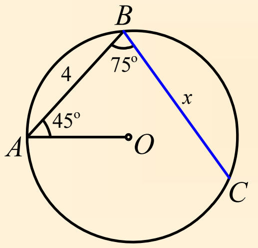
Bu çemberlerin merkezlerinden geçen çember de r yarıçaplıdır, P dışındaki diğer kesişim noktaları olan X, Y, Z noktalarından geçen çember de r yarıçaplıdır.

Kanıt: A, B, C merkezlerini X, Y, Z noktalarıyla birleştirelim. *AYBP*, *BZCP* ve *CXAP* birer eşkenar dörtgen olurlar. P noktasının *ABC* üçgeninin çevrel çember merkezi olduğu ve bu çemberin yarıçapının r olduğu âşikar.



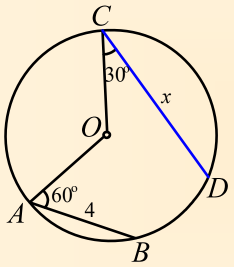
$AX // PC$ ve $PC // BZ$ olduğundan $AX // BZ$'dir. Aynı zamanda $|AX| = |BZ|$ olduğundan *ABZX* bir paralelkenardır. O halde $|AB| = |XZ|$ olur. Benzer işlemleri diğer paralellikler için yaparsak $|BC| = |YX|$ ve $|CA| = |ZY|$ çıkar. Buradan da K.K.K. Eşliği gereği *ABC* ile *ZXY* üçgenleri eştir. *ABC* üçgeninin çevrel çember yarıçapı r olduğundan *XYZ* üçgeninin de çevrel çember yarıçapı r'dir.

1. O merkez



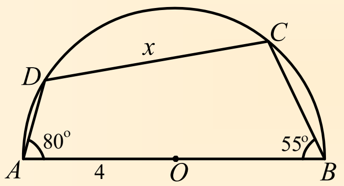
x kaçtır? ($2\sqrt{6}$)

2. O merkez



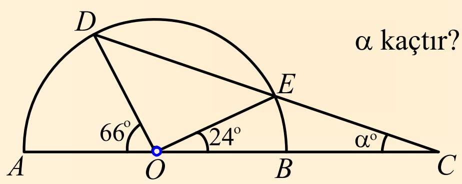
x kaçtır? ($4\sqrt{3}$)

3. O merkez, $[AB]$ çap



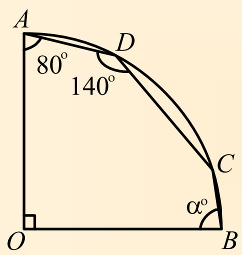
x kaçtır? ($4\sqrt{2}$)

4. O merkez, A, O, B, C doğrudaş



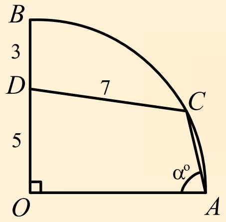
α kaçtır? (21)

5. O merkez



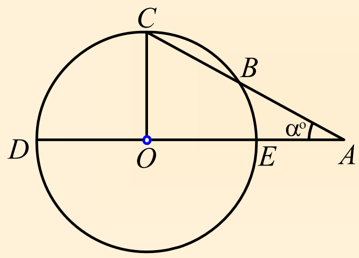
α kaçtır? (85)

6. O merkez



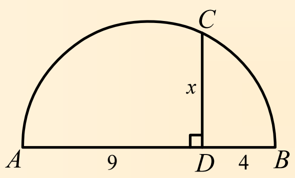
α kaçtır? (75)

7. O merkez, $[DE]$ çap, $CO \perp DA$, $|BA| = |DO|$



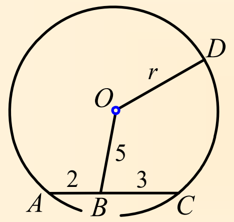
α kaçtır? (30)

8. $[AB]$ çap



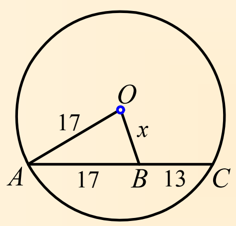
x kaçtır? (6)

9. O merkez



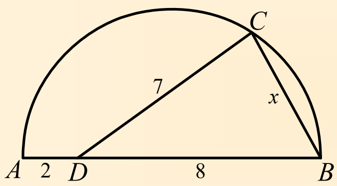
r kaçtır? ($\sqrt{31}$)

10. O merkez



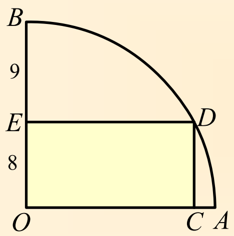
x kaçtır? ($2\sqrt{17}$)

11. $[AB]$ çap



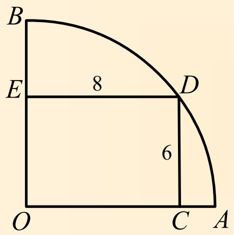
x kaçtır? (5)

12. O merkez, $OCDE$ dikdörtgeninin alanı = S



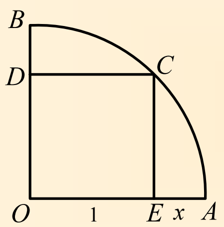
S kaçtır? (120)

13. O merkez, $OCDE$ dikdörtgen



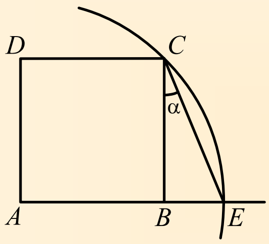
$|BE| + |CA|$ kaç br dir? (6)

14. O merkez, $OECD$ kare



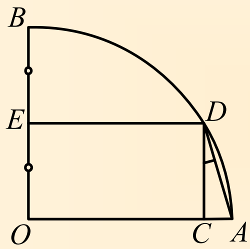
x kaçtır? ($\sqrt{2}-1$)

15. A merkez, $ABCD$ kare



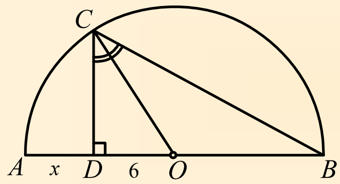
α kaçtır? (π/8)

16. O merkez, $OCDE$ dikdörtgen



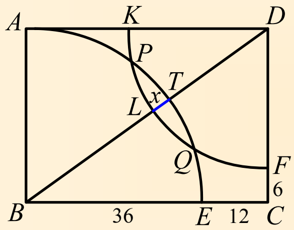
$m(ADC)$ kaç derecedir? (15)

17. O merkez



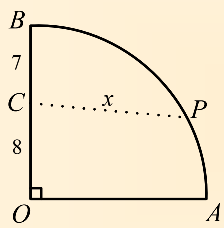
x kaçtır? (6)

18. B ve D merkez, $ABCD$ dikdörtgen



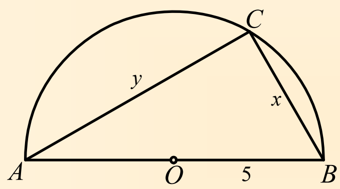
x kaçtır? (6)

19. O merkez, $P \in)\overset{\frown}{AB}($



x kaç farklı tam sayı değeri alabilir? (9)

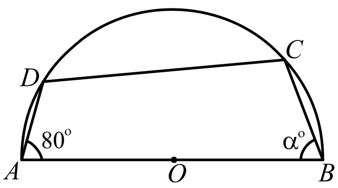
20. O merkez, $[AB]$ çap



$\max(x \cdot y)$ kaçtır? (50)

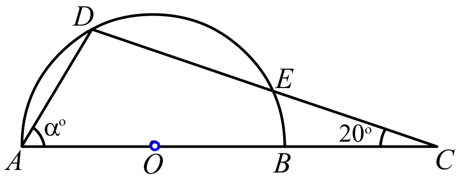
CEVAPLI TEST

21.
$[AB]$ çap
O merkez
$m(DAB) = 80°$
$m(CBA) = \alpha°$
$|DC| = \sqrt{3}|AO|$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 55 B) 60 C) 65 **D)** 70 E) 75

22.
$[AB]$ çap
O merkez
$m(C) = 20°$
$m(A) = \alpha°$

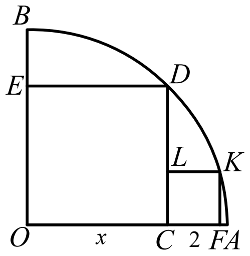


$|DE| = \sqrt{2} \cdot |AO|$ **olduğuna göre α kaçtır?**

A) 55 B) 57,5 C) 60 D) 62,5 E) 65

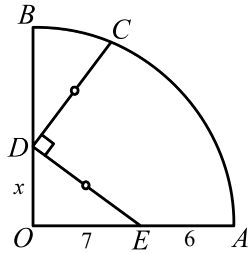
23.
O çeyrek çemberin merkezi
$OCDE$ ve $CFKL$ birer kare
$|CF| = 2$ br
$|OC| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?



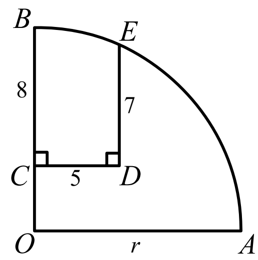
A) $2+2\sqrt{3}$ B) $2+2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 5 E) 6

24.
O çeyrek çemberin merkezi
$ED \perp DC$
$|ED| = |DC|$
$|OE| = 7$ br
$|EA| = 6$ br
$|DO| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



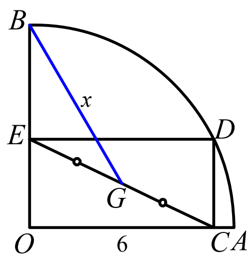
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

25.
O çeyrek çemberin merkezi
$DC \perp BO$, $ED \perp CD$
$|CD| = 5$ br
$|DE| = 7$ br
$|CB| = 8$ br
$|OA| = r$ br
olduğuna göre r kaçtır?



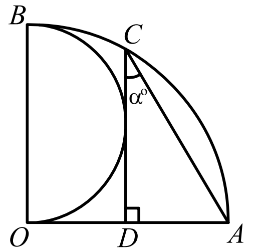
A) 12 **B)** 13 C) 14 D) 15 E) 16

26.
O çeyrek çemberin merkezi
$OCDE$ bir dikdörtgen
$[EC]$ köşegen
$|BE| = |EO|$
$|EG| = |GC|$
$|OC| = 6$ br
$|BG| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



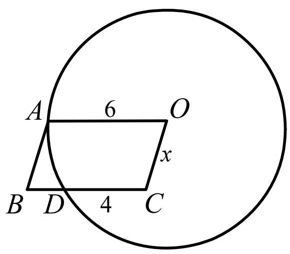
A) 6 B) $\sqrt{37}$ C) $\sqrt{39}$ D) $\sqrt{40}$ E) $\sqrt{45}$

27.
O çeyrek çemberin merkezi
$[OB]$ yarım çemberin çapı
DC yarım çembere teğet
$DC \perp OA$
$m(ACD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



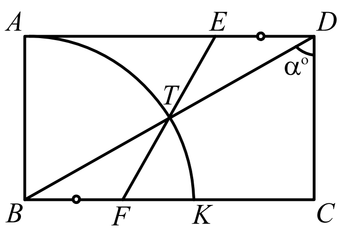
A) 15 B) 20 C) 25 **D)** 30 E) 36

28.
O merkez
$ABCO$ paralelkenar
$|AO| = 6$ birim
$|DC| = 4$ birim
$|CO| = x$ birim
$m(ABC) < 90°$
olduğuna göre
x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 1 **B)** 2 C) 3 D) 4 E) 5

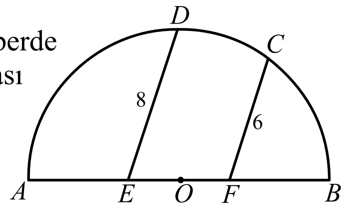
29.
$ABCD$ dikdörtgen
B merkez
$BD \cap EF = \{T\}$
$|BF| = |ED|$
$m(BDC) = \alpha°$



T çember yayı üzerinde olduğuna göre α kaçtır?

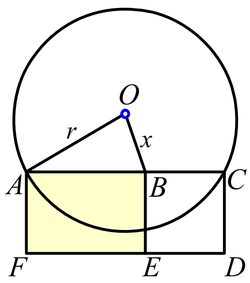
A) 30 B) 45 **C)** 60 D) 67,5 E) 75

30.
$[AB]$ çaplı yarım çemberde
D çember yayının ortası
$ED \,//\, FC$
$|EO| = |OF|$
$|ED| = 8$ br
$|FC| = 6$ br
olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç br dir?



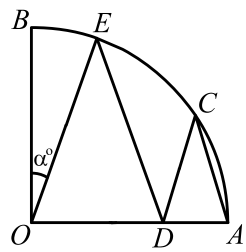
A) 7 B) $5\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{13}$ D) $3\sqrt{6}$ **E)** $2\sqrt{14}$

31.
O merkez
$AFDC$ dikdörtgen
$BEDC$ kare
$|OA| = r$ br
$|OB| = x$ br
$r^2 - x^2 = 8$ br^2
olduğuna göre
$|AFEB|$ kaç br^2 dir?



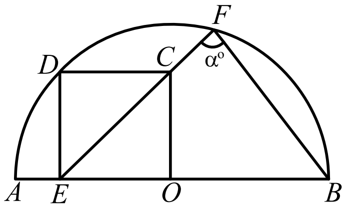
A) 16 B) 12 **C)** 8 D) 6 E) 4

32.
Çeyrek çemberde O merkez
$|EO| = |ED|$
$m(BOE) = \alpha°$
EOD ile CDA üçgenleri benzer olduğuna göre α kaçtır?



A) 10 B) 12 C) 15 **D)** 18 E) 20

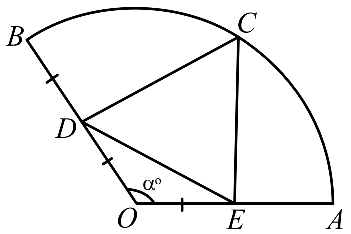
33.
[AB] çap
O merkez
$OCDE$ bir kare
E, C, F doğrusal
$m(BFE) = \alpha°$



olduğuna göre α kaçtır?

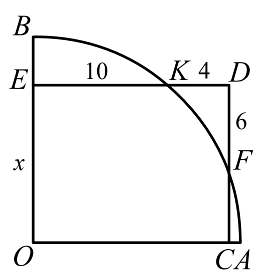
A) 82,5 B) 90 C) 97,5 D) 105 E) 112,5

34.
$OACB$ daire dilimi
O merkez
ECD eşkenar üçgen
$|BD| = |DO| = |OE|$
$m(AOB) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



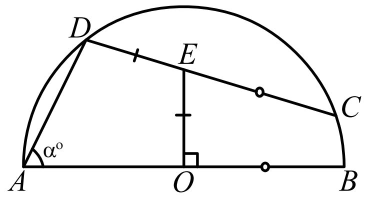
A) 105 **B)** 120 C) 135 D) 150 E) 165

35.
O merkez
$OADE$ dikdörtgen
$|FD| = 6$ br
$|DK| = 4$ br
$|KE| = 10$ br
$|EO| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



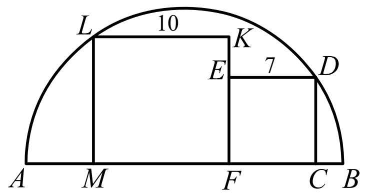
A) 9 B) 10 **C)** 11 D) 12 E) 13

36.
[AB] çap, O merkez
$EO \perp AB$
$|ED| = |EO|$
$|OB| = |EC|$
$m(BAD) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



A) 57 B) 60 **C)** 63 D) 66 E) 72

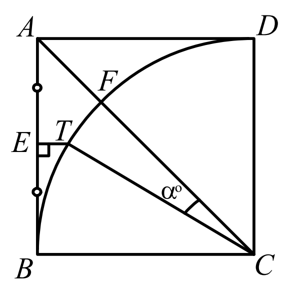
37.
[AB] çap
$LMFK$ ve $EFCD$
birer kare
$|LK| = 10$ br
$|ED| = 7$ br



Çemberin yarıçapı r br olduğuna göre r^2 kaçtır?

A) 121 B) 125 C) 136 D) 144 **E)** 149

38.
$ABCD$ kare
C merkez
[AC] köşegen
$TE \perp AB$
$|AE| = |EB|$
$m(CTF) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



A) 25 B) 20 C) 18 **D)** 15 E) 12