

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

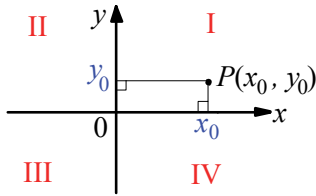
Analitik Düzlem

Çakışık olmayan iki doğrunun bir düzlem belirttiğini biliyoruz. Şimdi iki tane sayı doğrusu hayal edin. Bu iki sayı doğrusunu, sıfıra denk gelen noktalarında dik keşişecek konuma getirin. Bu iki sayı doğrusunun belirttiği düzleme *analitik düzlem* deriz. Artık doğruların isimleri de değişerek **eksen** adını alırlar. Hatta **koordinat eksenleri**. Bunlardan yatay olanına **x eksen**, dikey olanına da **y eksen** denir. Göreceksiniz ki birçok düzlem geometri problemi bile analitik düzleme yatırılarak çok daha kolaylıkla çözülebilir. *René Descartes* sağ olsun!

Eksen adı verilen bu iki sayı doğrusunun üzerindeki noktalar \mathbb{R} 'nin birer elemanı olduklarından analitik düzlem \mathbb{R}^2 ile gösterilir.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } y \in \mathbb{R}\}$$

Analitik düzlemde



yukarıda gösterildiği üzere $P(x_0, y_0)$ ile gösterilen sonsuz nokta vardır. (x_0, y_0) rastgele bir ikili değil, sıralı ikilidir. Birinci bileşenine **apsis**, ikinci bileşenine de **ordinat** denir. İkisine birlikte noktanın düzlemdeki **koordinatları** denir. Bir noktanın apsisi, o noktadan x eksenine indirilen dikmenin x ekseninde hangi noktaya karşılık geldiğini verir. Bir noktanın ordinatı ise, o noktadan y eksenine bir dikme indirildiğinde y ekseninde hangi sayıya karşılık geldiğini gösterir. x ve y eksenleri bazen bu yüzden sırasıyla **apsis ve ordinat eksenleri** olarak da anılır. Apsis ve ordinat eksenlerinin kesiştiği noktaya **başlangıç noktası** dendiği gibi **orijin** de denir. Koordinatları $(0, 0)$ 'dır. Genelde O ile gösterilir. Eksenleri Ox ve Oy ile göstermek de mümkün.

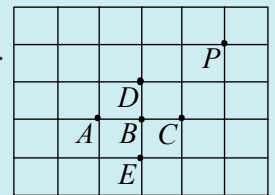
René Descartes.

Fransız bir filozofmuş. Tabii o zamanın filozofları bugünün matematikçileri gibiymişler. Aslında bu her zaman da böyle olmalı ama nedense bu aralar böyle gitmiyor işler!



La géométrie isimli eserinde *René Descartes*, cebirin ünlü problemlerini geometrik yöntemlerle çözümlenerek hak ettiği üne kavuşmuştu. Günümüzde kartezyen geometri olarak bilinen matematik dalının mucididir. 1604 yılının ocak ayında 8 yaşında Anjou'daki *Jesuit college of La Flèche*'e kaydını yaptırmış ve 1612'ye kadar burada okumuştur. Bu sıralarda *Clavius*'nun kitaplarından matematik de çalışmıştır. Böylelikle esas yeteneğinin matematikte olduğunu keşfetmiştir. Sayısız eser vermiştir. 1649'da soğuk bir kış sabahı hayata gözlerini yummuştur.

Örnek. Yandaki şekil eş birim karelerden oluşmuştur. P noktasının koordinatları $(3, 2)$ olduğuna göre A, B, C, D, E noktalarından hangisi orijindir?



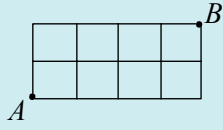
- A) A B) B C) C D) D E) E

Çözüm: P noktasının koordinatları $(3, 2)$ olarak verildiğine göre P noktasından 3 birim sola ve 2 birim aşağıya gidilirse orijine varılır. Bu rotaya göre orijin A noktasıdır.

Doğru cevap: A.

Uyarı. Yukarıdaki soruyu, koordinat sisteminin eksenlerini birim karelerin kenarlarına paralel vaziyette düşünerek çözdük. Hâlbuki öyle olmayabilir de! Orijine uzaklık kavramını öğrenince E 'nin de orijin olabileceğini göreceksiniz.

Örnek. Yandaki şekilde analitik düzlemin eş birim karelerden oluşturulmuş bir parçası gösterilmiştir.



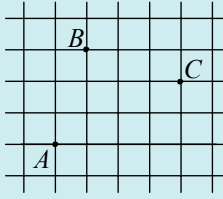
A noktasının koordinatlarının toplamı 12 ise B noktasının koordinatları toplamı kaç olur?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm: Şekle bakıldığında A noktasından 4 birim sağa ve 2 birim yukarı çıkıldığında B noktasına varıldığını anlıyoruz. Demek ki B noktasının apsisi A 'ninkinden 4 fazla, ordinatı da 2 fazla, bu durumda koordinatları toplamı 6 fazla olacaktır. O halde cevabımız $12 + 6 = 18$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. Eş karelerden oluşmuş yandaki ızgarada $A(3, -1)$, $B(5, 5)$ ve C noktaları belirtilmiştir. Buna göre C 'nin koordinatları çarpımı kaç olabilir?



Çözüm: B , A 'nın yatay eksen olarak 1 br sağında iken apsisi 2 artmış, o halde C , 4 br sağda olduğundan apsisi A 'ya göre 8 artar. Aynı B , A 'nın dikey eksen olarak 3 br üstüneyken ordinatı 6 artmış, o halde C , 2 br üstünde olduğundan ordinatı A 'ya göre 4 artar. Şu durumda $C(11, 3)$ bulunacağından cevap 33 olabilir. (Sizce neden soru 'kaçtır' değil?)

Analitik Düzlemin Bölgeleri. Analitik düzlemde eksenler, düzlemi 4 bölgeye ayırır. Hem apsisi hem de ordinatı pozitif olan noktaların bulunduğu bölgeye **birinci bölge**, apsisi negatif ama ordinatı pozitif olan noktaların bulunduğu bölgeye **ikinci bölge**, hem apsisi hem de ordinatı negatif olan noktaların bulunduğu bölgeye **üçüncü bölge** ve apsisi pozitif olup, ordinatı negatif olan noktaların bulunduğu bölgeye de **dördüncü bölge** denir.

	I	II	III	IV
Apsis	+	-	-	+
Ordinat	+	+	-	-

Dikkat edilecek olursa, bölgeler, noktaların koordinatlarının pozitif mi negatif mi olduğuna göre değişiyor, yani sıfırdan bahsedilmiyor. Apsisi veya ordinatı sıfır olan noktalar, kısacası *ksen üzerindeki noktalar* (tanıma göre) *bölgelere girmezler*.

Örnek. $A(a-b, ab)$ noktası analitik düzlemin üçüncü bölgesindeyse $B(b, a)$ hangi bölgededir?

- A) I. bölge B) II. bölge C) III. bölge
D) IV. bölge E) I. veya IV. bölge

Çözüm: Üçüncü bölgede apsis de ordinat da negatif olacağından $a - b < 0$ ve $ab < 0$ olduğunu anlamamız gerekiyor. $ab < 0$ eşitsizliğinden a ile b 'den birinin negatif birinin pozitif olduğu sonucu çıkar.

$a - b < 0$ yani $a < b$ olduğundan negatif olan a , pozitif olan b 'dir. O halde $B(b, a)$ noktasının apsisi pozitif, ordinatı negatiftir. Bu da dördüncü bölgede olmasını gerektirir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A(a-b, ab)$ noktası analitik düzlemin üçüncü bölgesindeyse $B(a+b, -a^2)$ hangi bölgededir?

- A) y ekseninin sağ tarafı B) y ekseninin sol tarafı
C) x ekseninin alt tarafı D) x ekseninin üst tarafı
E) III. ve IV. bölgeler

Çözüm: Bir önceki çözümden dolayı a 'nın negatif ve b 'nin pozitif olduğunu biliyoruz. Bu durumda $a + b$ toplamı negatif de olabilir, pozitif de olabilir, hatta 0 da olabilir.

$-a^2$ sayısı a hangi negatif değeri alırsa alsın negatif olacağından $(a + b, -a^2)$ noktasının alacağı durumlar $(+, -)$, $(0, -)$ ve $(-, -)$ 'dir. Demek ki ordinatı negatif olan tüm noktalar cevap olabilir. Bu da C şıkında verilmiş.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A(a+3, 1)$ ve $B(6, 2-a)$ noktaları analitik düzlemin aynı bölgesinde olduklarına göre a kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

Çözüm: A 'nın ordinatı pozitif olduğundan B 'nin ordinatı da pozitif olmalıdır. Diğer yandan B 'nin apsisi pozitif olduğundan A 'nın apsisi de pozitif olmalıdır.

$$a + 3 > 0$$

$$2 - a > 0$$

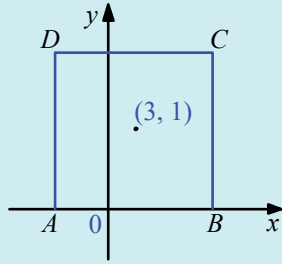
sistemi birlikte çözümlerse

$$-3 < a < 2$$

bulunacağından a ; $-2, -1, 0, 1$ olmak üzere 4 farklı tam sayı değeri alabilir.

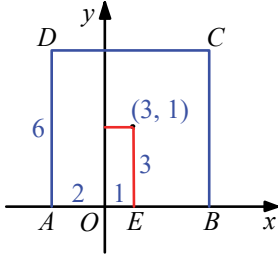
Örnek.

$ABCD$ bir kare
 $AB \in Ox$
 Karenin ağırlık merkezinin koordinatları $(3, 1)$ ise D köşesinin koordinatları hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?



- A) $(-2, 8)$ B) $(-2, 6)$ C) $(-2, 4)$
 D) $(-3, 6)$ E) $(-1, 6)$

Çözüm: Karenin ağırlık merkezinin karşılıklı kenarlara eşit uzaklıkta olduğunu biliyoruz. Ağırlık merkezinden Ox eksenine inilen dikme ayağı E olsun. Bu dikmenin uzunluğu 3 br olarak verildiğinden, onların ki karenin bir kenar uzunluğu 6 br dir.

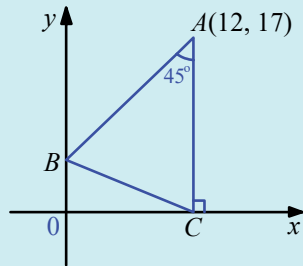


Diğer yandan $|OE| = 1$ br olduğundan $|AO| = 3$ br olmalıdır. Şu durumda D noktasının koordinatları $(-2, 6)$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

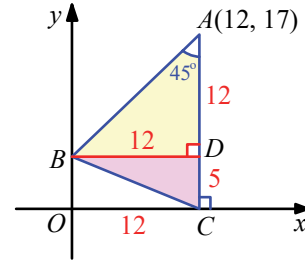
Örnek.

ABC bir üçgen
 $A(12, 17)$
 $AC \perp Ox$
 $B \in Oy$
 $m(\angle BAC) = 45^\circ$
 olduğuna göre
 $|BC|$ kaç br dir?



- A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 17

Çözüm: B 'den AC 'ye indirilen dikme ayağı D olsun. $m(\angle A) = 45^\circ$ olduğundan BDA ikizkenar dik üçgen olacaktır.

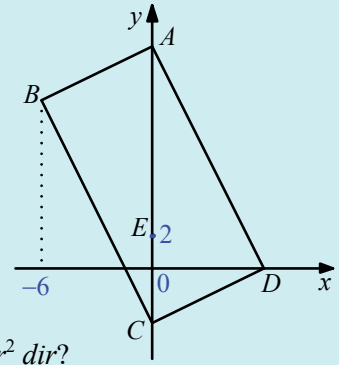


$|OC| = |BD| = |AD| = 12$ br olduğundan $|DC| = 5$ br olduğu görülürse BDC dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|BC| = 13$ br olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

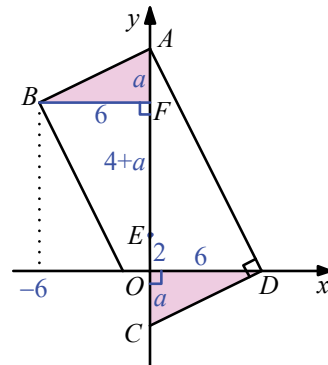
Örnek.

$ABCD$ dikdörtgen
 $A \in Oy$
 $C \in Oy$
 $D \in Ox$
 B 'nin apsisi: -6
 E 'nin ordinatı: 2
 $|AE| = 2 \cdot |EC|$
 olduğuna göre
 $ABCD$ dikdörtgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



- A) 45 B) 72 C) 78 D) 84 E) 90

Çözüm: B 'den y eksenine inilen dikme ayağı F olsun. BFA ile DOC üçgenlerinin eşliği görülürse gerisi Öklit Teoremi'nden gelir sanırım.



$|AF| = |OC| = a$ br denirse $|CE| = a + 2$ br olacağından $|EA| = 4 + 2a$ br olması için $|EF| = 4 + a$ br olmalıdır. CDA dik üçgeninde Öklit Teoremi'nden

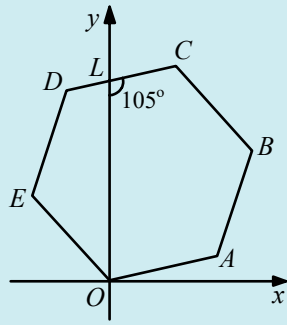
$$6^2 = a \cdot (6 + 2a)$$

eşliğinden $a = 3$ bulunur. Şu durumda $ABCD$ dikdörtgensel bölgesinin alanı $|CA| \cdot |OD| = 15 \cdot 6$ br^2 yani 90 br^2 olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$OABCDE$ bir düzgün altıgen
 $DC \cap Oy = \{L\}$
 $m(\angle OLC) = 105^\circ$
 Bu altıgenin alanı $24\sqrt{3} br^2$ olduğuna göre A noktasının apsisi kaçtır?

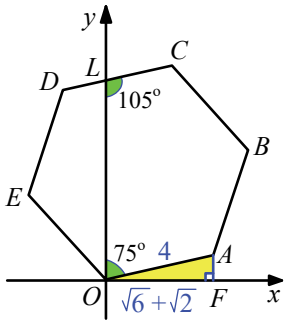


- A) $\sqrt{3} - 1$ B) $\sqrt{3} + 1$ C) $2\sqrt{3} - 2$
 D) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ E) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

Çözüm: Düzgün altıgenin 6 adet eşkenar üçgenden oluştuğunu biliyoruz. O halde bu altıgenin bir kenar uzunluğu a br ise alanı

$$6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

olur. Bu değeri $24\sqrt{3}$ 'e eşitlersek $a = 4$ buluruz. Diğer yandan $DC \parallel OA$ olduğundan $m(\angle AOL) = 75^\circ$ olur.



Şu durumda OFA dik üçgeni bir $15^\circ-75^\circ-90^\circ$ üçgenidir. Hipotenüsü 4 br olarak verildiğinden

$$|OF| = \sqrt{6} + \sqrt{2} \text{ br}$$

olarak bulunur.

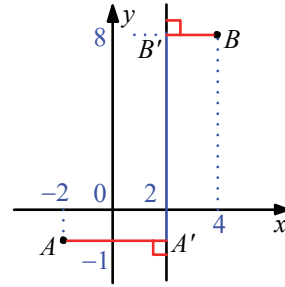
Doğru cevap: D.

Örnek. Bir doğru parçasının uçlarından bir başka doğruya inilen dikme ayaklarını uç kabul eden doğru parçasına, ilk doğru parçasının doğru üzerindeki dik izdüşümünü denir.

Bu tanıma göre; $A(-2, 1)$ ve $B(4, 8)$ noktalarının belirttiği $[AB]$ doğru parçasının $x = 2$ doğrusu üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu kaç br dir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $x = 2$ doğrusu y eksenine paralel olduğundan işimiz çok kolay olacak.



A ve B noktalarından inilen dikme ayaklarına sırasıyla A' ve B' dersek $|A'B'| = 9$ br olduğu rahatlıkla görülür.

Doğru cevap: D.

Şimdi de oldukça kolay ama düzlem geometrisinde öğrenmiş olduğunuz benzerlik kavramını da kullanmanız gereken bir soru çözeceğiz.

Örnek.

$ABCD$ bir dörtgen

$$|AE| = |EB|$$

$$|BF| = |FC|$$

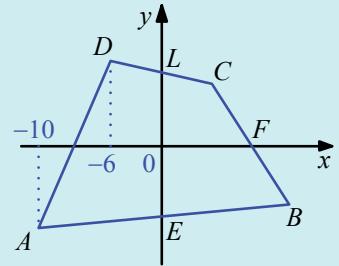
$$|CL| = |LD|$$

A' 'nin apsisi: -10

D' 'nin apsisi: -6

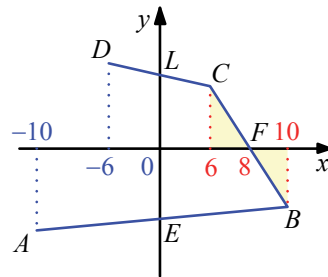
olduğuna göre

F 'nin apsisi kaçtır?



- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $|DL| = |LC|$ olduğundan C 'nin apsisi 6 'dır. $|AE| = |EB|$ olduğundan B 'nin apsisi 10 'dur.



$|CF| = |FB|$ olduğundan taralı kelebektaki benzerlik oranı 1 olur. Bu yüzden F 'nin apsisi 6 ile 10'un ortası yani 8 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

1.

Koordinatları verilmiş bir noktanın x eksenine olan uzaklığını aşağıdakilerden hangisi gösterir?

- A) Apsisi
- B) Ordinatı
- C) Apsisinin mutlak değeri
- D) Ordinatının mutlak değeri
- E) Koordinatları toplamı

2.

$M(x, y)$ noktasının y eksenine olan uzaklığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x
- B) y
- C) $|x|$
- D) $|y|$
- E) $x + y$

3.

x eksenine 2 birim, y eksenine 3 birim uzaklıkta bulunan bir nokta, analitik düzlemin hangi bölge veya bölgelerinde olabilir?

- A) Birinci
- B) İkinci
- C) Üçüncü
- D) Dördüncü
- E) Hepsi

4.

$A(-a, b - a)$ noktası analitik düzlemin ikinci bölgesinde olduğuna göre $B(ab, a - b)$ noktası hangi bölgededir?

- A) Birinci
- B) İkinci
- C) Üçüncü
- D) Dördüncü
- E) Hepsi

5.

$A(ab, a - b)$ noktası analitik düzlemin üçüncü bölgesinde olduğuna göre $B(a, b)$ noktası analitik düzlemin hangi bölgesinde bulunur?

- A) Birinci
- B) İkinci
- C) Üçüncü
- D) Dördüncü
- E) Hepsi

6.

m bir reel sayıdır.

$$P(-m^2, (-m)^2)$$

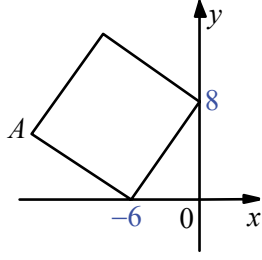
noktaları analitik düzlemin neresinde bulunur?

- A) İkinci bölge
- B) İkinci bölge veya orijin
- C) İkinci bölge ve y ekseninin pozitif tarafı
- D) İkinci bölge ve x ekseninin negatif tarafı
- E) İkinci bölge, x ekseninin negatif tarafı, y ekseninin pozitif tarafı ve orijin

1.

Yandaki $ABCD$ karesinin A köşesinin koordinatları nelerdir?

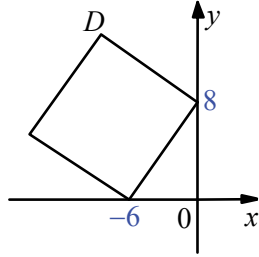
- A) $(-12, 6)$
 B) $(-18, 6)$
 C) $(-16, 6)$
 D) $(-16, 8)$
 E) $(-14, 6)$



2.

Yandaki $ABCD$ karesinin D köşesinin koordinatları nelerdir?

- A) $(-8, 12)$
 B) $(-8, 14)$
 C) $(-6, 8)$
 D) $(-6, 14)$
 E) $(-14, 6)$

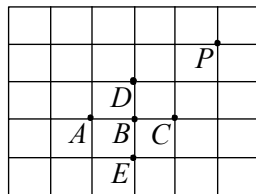


3.

Yandaki şekil eş birim karelerden oluşmuştur.

P noktasının koordinatları $(2, 3)$ olduğuna göre A, B, C, D, E noktalarından hangisi orijindir?

- A) A B) B C) C D) D E) E

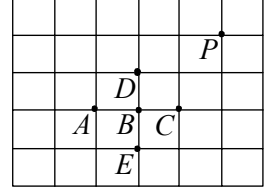


4.

Yandaki şekil eş birim karelerden oluşmuştur.

P noktasının koordinatları $(2, 2)$ olduğuna göre A, B, C, D, E noktalarından hangisinin koordinatları $(-1, 0)$ 'dır?

- A) A B) B C) C D) D E) E

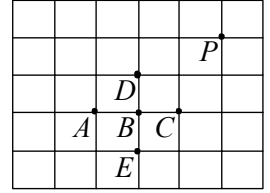


5.

Yandaki şekil eş birim karelerden oluşmuştur.

P noktasının koordinatları toplamı 11 olduğuna göre A, B, C, D, E noktalarından hangisi veya hangilerinin koordinatları toplamı 6'dır?

- A) A B) E C) A ve B
 D) B ve E E) A ve E

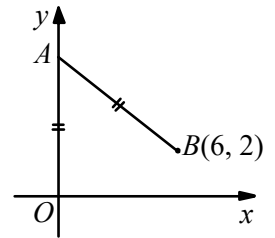


6.

Ordinat ekseninde bulunan A noktasının orijine ve $B(6, 2)$ noktasına uzaklıkları eşittir.

Buna göre A noktasının ordinatı kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

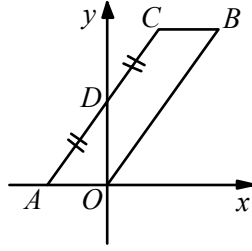


1.

Yandaki şekilde $AOBC$ bir paralelkenardır.

$$|AD| = |DC|$$

olup C 'nin koordinatları $(3, 8)$ ise paralelkenarın alanı kaç birimkaredir?

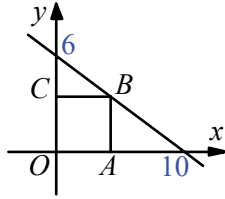


- A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

2.

Yandaki $OABC$ karesinin B köşesi doğrunun üstündedir.

Buna göre karenin çevresi kaç birimdir?

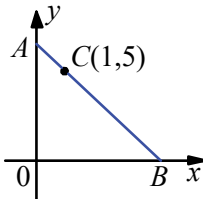


- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

3.

$C(1, 5)$ noktası, AOB ikizkenar üçgeninin hipotenüsü üzerindedir.

Buna göre Alan(AOB) kaç birimkaredir?

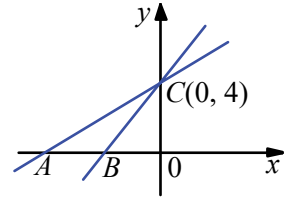


- A) 8 B) 18 C) $\frac{25}{2}$ D) $\frac{81}{4}$ E) 32

4.

Yandaki şekilde CAB ve CAO üçgensel bölgelerinin alanları sırasıyla 4 ve 10 birimkaredir.

C 'nin ordinatı 4 ise B 'nin apsisi kaçtır?

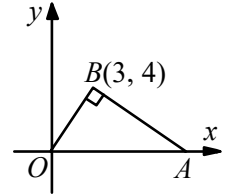


- A) -3 B) -4 C) -6 D) -7 E) -8

5.

Yandaki OAB üçgeni bir dik üçgendir.

B 'nin koordinatları $(3, 4)$ olduğuna göre A noktasının apsisi kaçtır?

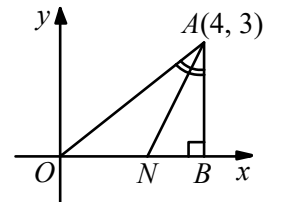


- A) 4 B) 5 C) $\frac{25}{3}$ D) $\frac{27}{4}$ E) $\frac{15}{2}$

6.

Yandaki OBA bir dik üçgen olup $[AN]$ iç açıortaydır.

A noktasının koordinatları $(4, 3)$ ise N noktasının apsisi kaçtır?



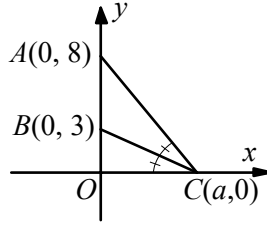
- A) $\frac{19}{5}$ B) $\frac{12}{5}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{14}{5}$

1.

AOC dik üçgeninin köşe koordinatları yan şekilde verilmiştir.

CB iç açıortay olduğuna göre a kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

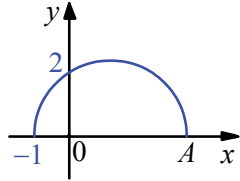


2.

Yandaki eğri bir yarım çembere aittir.

Buna göre A noktasının apsisi kaçtır?

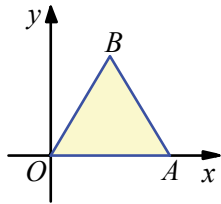
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8



3.

Yandaki OAB eşkenar üçgeninin alanı $9\sqrt{3}$ br² dir. Buna göre A noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

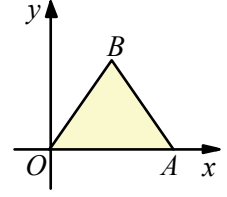


4.

Yandaki OAB üçgeninin alanı B köşesinin koordinatları çarpımına eşittir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi OAB üçgeni için kesinlikle söylenebilir?

- A) Eşkenar üçgen B) Dik üçgen
C) İkizkenar dik üçgen D) İkizkenar üçgen
E) Çeşitkenar üçgen



5.

$OABC$ bir dörtgen

$AB \perp BC$

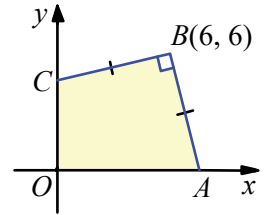
$|AB| = |BC|$

$B(6, 6)$

olduğuna göre

Alan($OABC$) kaç br² dir?

- A) 36 B) 32 C) 30 D) 24 E) 18



6.

$|OA| = 4\sqrt{3}$ br

A noktası, orijine uzaklığı değiştirilmeden orijin etrafında pozitif yönde 30° döndürülürse gelen noktanın ordinatı kaç olur?

- A) $2\sqrt{3}$ B) 3 C) 4 D) $4\sqrt{3}$ E) 6

