Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Sayı Kümeleri

Bir çokluğu ifade etmek veya bir çokluğun bir diğerinden küçük mü büyük mü, eksik mi fazla mı, kısa mı uzun mu olduğunu anlatabilmek için günlük konuşma kelimelerinden başka kavramlara gereksinim duyarız. Bir insanın bir diğerine yaşını, boyunu, kaç çocuğu olduğunu anlatabilmesi için belki parmakları yeter ama saçında kaç kıl olduğunu veya ne kadar parası olduğunu anlatabilmesi için parmaktan öte bir şeye ihtiyaç duyar. İşte, ihtiyaç duyulan bu şey ‘sayı’dır.

Nesnelerin miktarının artmasıyla birlikte sayılar da artar. Her sayıya bir sembol bulmak mümkün olsa da, öğrenilip karıştırılmadan akılda tutulması mümkün değildir. Dolayısıyla sınırlı ve mantıklı sayıda sembol bulunup bunların değişik sıralarda bir araya getirilmesiyle sayılar oluşturulmalıdır. Mantıklı olan da budur. İşte sayıları ifade etmek için bir araya getirilen bu sembollere/işaretlere **rakam** denir.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sembolleri günlük hayatta kullandığımız sayma düzeninin rakamlarıdır.

Bugüne kadar dünyada yaşamış her millet, farklı farklı sembollerle olsa da kendilerine göre rakamlar tanımlamışlardır. Örneğin Romalılar rakamları ve sayıları I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, L, M gibi sembollerle göstermişlerdir. Görüldüğü üzere her sembol değişik sıralarda bir araya gelerek farklı çoklukları anlatmaktadır. Dolayısıyla bunların her biri birer sayıdır. Unutulmamalı ki her rakam bir sayıdır ama her sayı bir rakam değildir.

Örnek. *a ile b birer rakam olmak üzere*

$$a + b$$

toplamı kaç farklı değer alabilir?

A) 9 B) 10 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm: Rakamların 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 olduklarını söylemiştik. Soruda a ile b’nin farklı oldukları söylenmediğinden, onları aynı da alabileceğimizi unutmayın.

Toplamın alabileceği en küçük değer ile en büyük değeri bulup kaç farklı değer alabileceğini *sayarak* bulacağız. İkisine de 0 verirsek, $a + b = 0$ olur, ikisine de 9 verirsek $a + b = 18$ olur.

Şu durumda, toplam, 0’dan 18’e kadar 19 farklı değer alabilir.

Doğru cevap: D.

Sayı Kümeleri

Nasıl ki beş parmağın beşi bir değil, sayılar da öyledir. Sayılar, bazı yönlerinden dolayı birbirlerinden ayrılırlar. İlkokuldan beri bildiğiniz, bizim de tekrar göstereceğimiz üzere, bazıları pozitiftir bazıları negatif, bazıları tektir bazıları çift, bazıları iki basamaklıdır bazıları beş, bazıları asaldır bazıları bileşik gibi… Sayılar işte bu ve bunun gibi ayrımlara göre sınıflanırlar. En ilkel sayılardan başlayalım:

Sayma Sayıları

Adı üstünde, sadece nesneleri saymaya yarayan sayılardır. 1, 2, 3, 4, … diye ilerlerler ve bitmezler. Bir sonu yoktur yani. Sonsuzlardır. Dikkat edin, sonsuzlardır diyoruz, sonsuza gider demiyoruz, çünkü sonsuz diye bir yer yoktur.

Sonsuz, bir yer değil, *sonu yoktur* manasına gelen bir nitelemedir (sıfattır). Teorik olarak doğrusu budur ama bu yanlış dilimize o kadar yerleşmiştir ki sivrilmenin de âlemi yok. Yazılarımızın ilerleyen bölümlerinde yanlışlıkla yanlış yaparsam, yanlışımı düzeltme yanlışına düşmeyin!

Tüm sayma sayılarının oluşturduğu kümeye **Sayma Sayıları Kümesi** denir.

Bu küme bazı Türkçe kaynaklarda (daha çok ilkokul) S harfi ile gösterilse de siz evrensel olan $\mathbb{N}^+$ sembolünü tercih edin, ben de öyle yapacağım.

Örnek. *$x - 5$ ile $x - 2$ sayılarından sadece bir tanesi sayma sayısı olduğuna göre x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm: Öncelikle verilen sayılar arasındaki farkın 3 olduğunu, daha sonra da bu sayıların büyük olanının (yani $x - 2$'nin) 4 veya daha büyük bir sayma sayısı olamayacağını fark etmek gerekiyor. Çünkü 4 veya 4'ten büyük olan sayma sayılarının 3 eksiği de sayma sayısıdır ve bu, soruda verilen bilgiyle çelişir. Şu durumda $x - 2$ sayısı ya 1, ya 2, ya da 3 olmalıdır.

$x - 2 = 1$ eşitliğinden $x = 3$,
$x - 2 = 2$ eşitliğinden $x = 4$,
$x - 2 = 3$ eşitliğinden $x = 5$

bulunacağından x'in alabileceği değerlerin toplamı 12 olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Doğal Sayılar

Bir şeyleri saymak için o bir şeylerin illa var olması lâzım değil mi? Olmayan bir şey nasıl sayılacak ki! Peki ya sayılacak o şey yoksa? O zaman sayma sayılarından hangisini kullanacağız? Sayma sayılarının her biri bir çokluğu simgelediğinden hiçbirini kullanamayız. Bu yüzden sayma sayılarında olmayan bir şey bulmalıyız, *olmayan şeyleri saymak veya olmadığını bir başkasına sayıyla anlatmak için.* Gerçi bizden binlerce yıl önce bulmuşlar, sağ olsunlar. Tanıştırayım: '0'. Cümle içinde de kullanayım: 10'dan 10 çıktı mı 0 kalır!

Sıfırın bulunması, şaşırtıcı bir şekilde, 1'in ve 2'nin bulunmasından binlerce yıl sonra olmuştur. Matematikte bir çığır açmıştır desek sanırım yanılmayız. Unutmayınız ki, sıfır ne pozitiftir ne de negatif! Ama sıfır çifttir, tek değil! Sayma sayıları ile 0'ın birlikte oluşturdukları bu kümeye **Doğal Sayılar Kümesi** deriz.
$\mathbb{N}$ sembolü ile gösteririz, N'yle değil!

Örnek. *$x - 4y$ ile $4y - x$ sayılarının ikisi de doğal sayı olduğuna göre $2x - 8y + 5$ kaçtır?*

A) 5 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm: Burada $x - 4y$ ile $4y - x$ sayılarının birbirlerinin ters işaretlisi olduklarını fark etmek gerekiyor. Demek ki ya bu sayıların biri negatif diğeri pozitif, ya da ikisi de birden sıfır!

Doğal sayıların arasında negatif sayılar olmadığından, iki sayının da birden 0 olduğunu anlıyoruz. Şu durumda $x - 4y = 0$ olduğundan, onun 2 katı olan $2x - 8y$ değeri de 0'dır. O halde

$$2x - 8y + 5 = 0 + 5$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Tam Sayılar

Ahmet'in 10 lirası varsa anlamamız gereken şey, cebinde veya bir yerde, kendine ait, bir kişiye ödemesi gerekmeyen 10 lirasının gerçekten olduğudur. Peki ya Ahmet'in hiç parası olmayıp üstüne üstlük bir de 10 lira borcu varsa? İşte bunu 'Ahmet'in –10 lirası var' yazarak göstereceğiz.

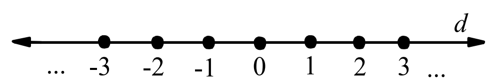
Tam sayılar hiç olmasaydı, n'olurdu? Bir şey olmazdı. Fakat onları anlatmak için epey bir vakit kaybederdik. Bunun için insan soyu 0'dan küçük sayıları icat etmiş. Aslında iyi de olmuş. Negatif sayıları anlatmak böylelikle çok kolay olmuş.

Yalnız burada dikkatinizi çekmek istediğim bir şey var: Yeni bulunan sayılar, eskilerinden ayrı bir yere konmuyor, eski sayılara ekleniyor. Böylelikle nur topu gibi yeni bir sayı kümesi oluşuyor. Doğal sayılarla, önlerine '–' işareti konmuş sayma sayılarının birleşimine **Tam Sayılar Kümesi** diyeceğiz. $\mathbb{Z}$ ile göstereceğiz. (Bu sembol Almanca Zahlen kelimesinin baş harfinden gelir.)

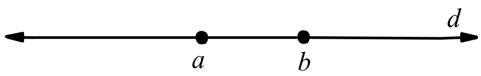
Tamsayıların başının da sonunun da olmadığını unutmayacağız. Pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$, negatif tam sayılar kümesi ise $\mathbb{Z}^-$ ile gösterilir. Anlayacağınız;

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Tam sayıların bir başının ya da bir sonunun olmaması bize geometrideki doğru kavramını hatırlatıyor. Öyle ya, doğrunun da başı yok, sonu yok! İşte bu yüzden tam sayıları, bir doğru üzerinde eşit aralıklarla alınmış noktalarla birebir eşleyebiliriz. Üzerindeki herhangi bir noktayı '0' olarak işaretlersek, sağındaki noktalar pozitif tam sayıları, solundaki noktalar da negatif tam sayıları simgelerler.



Bir önceki sayfada resmedilmiş d doğrusunun adı bundan böyle **sayı doğrusu** olacak. Görüldüğü üzere, sağa doğru gittikçe noktaların simgeledikleri sayılar büyümekte, sola doğru gittikçe küçülmektedir.



Örneğin, yukarıda resmedilmiş a ve b sayıları için a'nın b'den küçük (veya b'nin a'dan büyük) olduğunu anlarız ve bunu $a < b$ (veya $b > a$) ile gösteririz.

Örnek. *a ve b tam sayıları*

$$a < b < -6$$

eşitsizliklerini sağlamaktaysa a + b toplamı en çok kaç olabilir?

A) −12 B) −13 C) −14 D) −15 E) −16

Çözüm: Negatif sayılar, bildiğiniz üzere, (yazıldıkları hâliyle) işaretsiz değerleri ne kadar küçükse o kadar büyüktürler. Bu yüzden b'yi −7, a'yı da −8 almalıyız ki toplam olabildiğince büyük çıksın. Şu durumda (en büyük değeri **max** ile gösterirsek)

$$\max(a + b) = (-8) + (-7) = -15$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Rasyonel Sayılar

Önce kesir denen şeyi tanımlayalım, ardından rasyonel sayıların ne olduklarını anlatacağız.

a ve b tam sayı olmak üzere (ama b sıfırdan farklı) $\frac{a}{b}$ şeklindeki ifadelere **kesir** denir.

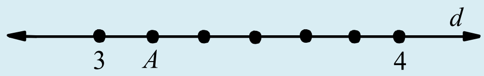
Bu kesirler bazen sadeleşirler $\frac{10}{5} = 2$ veya $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ gibi, bazen sadeleşemezler $\frac{2}{3}$ gibi…

İster sadeleşip bir tam sayı olsunlar, ister sadeleşemesinler, ister sadeleşebildiği halde sadeleşmesinler, böyle kesirlerle tam sayıların oluşturdukları kümeye **Rasyonel Sayılar Kümesi** denir.

Aslına bakarsanız, <u>değeri aynı olan kesirlerden sadece bir tanesini temsilci olarak almak kaydıyla</u> tüm *kesirler kümesine* de rasyonel sayılar kümesi diyebiliriz. Bu küme bu sebeple tam sayılar kümesini kapsar ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Bu sembol, *oran* manasına gelen Almanca *Quotient* kelimesinin baş harfinden türetilmiştir. Peki, neden 'rasyonel' denmiş acaba? Rasyonel, *gerçekçi veya gerçek değeri bilinen* anlamına gelir. Tüm kesirlerin gerçek değeri bilinir. Var olan ama gerçek değerini bilemediğimiz sayılar da vardır. Örneğin, bir çemberin çevre uzunluğunun çapının uzunluğuna oranı olan π sayısı… Yaklaşık değerini biliyoruz ama tam değerini hiçbir zaman bilemeyeceğiz!

Örnek. *Üzerinde eşit aralıklarla noktalar alınmış aşağıdaki sayı doğrusunda*



A ile gösterilen nokta hangi rasyonel sayıyı simgelemektedir?

A) $\frac{19}{6}$ B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{11}{3}$ E) $\frac{23}{6}$

Çözüm: 3'ü simgeleyen noktayla 4'ü simgeleyen nokta arasında 6 tane eşit uzunlukta aralık olduğunu fark etmek lâzım. 3 ile 4 arasındaki uzaklık 1 olduğundan, bu 6 aralığın her birinin uzunluğu $\frac{1}{6}$'dır.

A noktası 3'ü simgeleyen noktanın sağında olduğundan 3'ten büyüktür, hem de tam olarak bir aralık sağında olduğundan 3'ten $\frac{1}{6}$ büyüktür. Bu durumda A ile simgelenen sayı

$$3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Reel Sayılar

Bu sefer de önce irrasyonel sayıları tanımlayacağız. Ardından reel sayıların ne olduklarını vereceğiz.

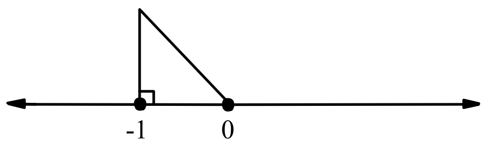
Tam sayı olan a ve b'ler için, değeri $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılar vardır. Biz daha bu kitapta göstermedik ama daha önce duymuş veya görmüş olmalısınız:

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}, \pi, e, \sin 15^{o}, \tan 18^{o}, \log_2 7 \text{ gibi…}$$

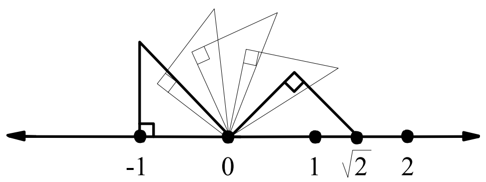
Böyle sayılara *rasyonel olmayan reel* manasında **irrasyonel sayılar** denir ve bu sayıların belirttiği küme $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir.

Bu tip sayıların ondalık yazılımlarında virgülden sonraki kısmın hiçbir kuralı yoktur. Dikkat edin, varsa bile günümüze kadar bulunamamıştır demiyoruz, olmadığı bulunmuştur diyoruz. Öklit'in bulmuş olduğu bu kanıtın, günümüze kadar yapılmış en güzel on kanıttan biri olduğu konusunda tüm matematikçiler hemfikirdir. Asal ve aralarında asal sayıları anlattığımız bölümde bu kanıtı vereceğiz.

İrrasyonel sayılar nihayetinde gerçek sayılar olduğundan onlara da sayı doğrusu üzerinde yer vardır. Karesi 2 olan pozitif sayının tamı tamına kaç olduğunu bilmesek bile öyle bir sayının var olduğunu biliyoruz. Peki, sayı doğrusu üzerindeki yeri neresidir?



Sayı doğrusu üzerine oturtulmuş, yukarıdaki gibi bir ikizkenar dik üçgen düşünün. Dik kenar uzunlukları 1 br olduğundan, Pisagor Teoremi gereğince hipotenüsünün uzunluğu $\sqrt{2}$ br olacaktır.



Şimdi bu dik üçgeni, sağ alt köşesi sabit kalmak üzere hipotenüsünün üzerine devirirsek, en başta üstte olan köşenin sayı doğrusunda denk düşeceği nokta $\sqrt{2}$ 'ye karşılık gelen nokta olacaktır. Tabii ki burada yazılanların hepsi teorik. Evde denemeyin!

İşte, rasyonel sayılarla bu irrasyonel sayıların birleşimine **Reel Sayılar Kümesi** denir. Reel yerine *gerçel* veya *gerçek* dendiği de olur. Bu küme $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Sanal Sayılar

Bu sayılar da gerçel olmayıp yani gerçekte var olmayıp (sanki diğer sayılar gerçekte var!) matematikçilerin tanımladığı sayılardır. Zaten bunun için **sanal** adını almışlardır.

'Karesi –1 olan bir sayı var olsun!' denmiş ve adı da i diye konmuş. Sonra bu i sayısı reel sayılarla cebirsel işlemlere sokularak $-i$, $2i$, $3 + i$, $4 - 8i$ gibi sayılar tanımlanarak aile büyütülmüş. Peki dertlere derman olmuş mu? Hem de çok! Zamanı gelince yeterince değineceğiz.

''Peki, niye *i*, başka harf mi kalmamış?'' derseniz, sebebi '*sanal*'ın İngilizcesinin *imaginary* olması olabilir. Onun baş harfinden dolayı yani…

Sanal sayılarla reel sayılar kümesinin birleşimine **Karmaşık Sayılar Kümesi** denir ve bu küme $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

Karmaşık sayılar kümesi, şu ana kadar gösterdiğimiz ve bundan sonra göstereceğimiz tüm sayı kümelerini kapsar. Belki ileride başka sayılar da bulunacak veya tanımlanacak, bu sayede $\mathbb{C}$'yi de kapsayan bir babayiğit küme çıkacak! Kim bilir?

Alman matematikçi ve mantıkçı Leopold Kronecker şöyle demiş: ''Tanrı sayma sayılarını yarattı, gerisi insanın işi!''

Toparlıyoruz: Ortaokulda gördüğünüz Kümeler dersinden, eğer A kümesinin tüm elemanları B kümesinin de elemanıysa; A'ya B'nin bir alt kümesi dendiğini ve bunu

$$A \subset B$$

yazarak gösterdiğimizi veya B'nin A'yı kapsadığını ve bunu

$$B \supset A$$

yazarak gösterdiğimizi bilirsiniz. Şu durumda sayı kümeleri için

$$\mathbb{N}^{+} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

veya

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N} \supset \mathbb{N}^{+}$$

yazabiliriz. (Yazıyı okuyan Sevgili Meslektaşım *Ömer Bulut*, yaşlandığımı hatırlattı. Meğer artık ortaokullarda gösterilmiyormuş!)

Bir de A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesi vardı. Onu da $A - B$ veya $A \backslash B$ ile gösteririz. Buna göre şu eşitlikleri yazabiliriz:

$\mathbb{N} - \mathbb{N}^{+} = \{0\}$,

$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$: Negatif tam sayılar kümesi,

$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$: Tamsayı olmayan kesirli sayılar kümesi,

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$: İrrasyonel sayılar kümesi,

$\mathbb{C} - \mathbb{R}$: Sanal sayılar kümesi.

Örnek. *Aşağıdaki sayılardan hangisi*

$$\mathbb{N}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

kümelerinin sadece dördünün elemanıdır?

A) 4 B) 0 C) −1 D) $\frac{1}{2}$ E) π

Çözüm: $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ kümeleri birbirlerini içine alarak büyüdüğünden bu kümelerden birinin elemanı olan sayı mutlaka o kümenin sağındaki kümenin de elemanıdır. O halde sayımız dört tanesinin elemanıysa sağdan dördüncüsünün elemanı yani en azından bir tam sayı olmalıdır. Fakat sayma sayısı ya da doğal sayı olmamalıdır. Demek ki sayımız negatif bir tamsayıymış. Bu da C şıkkında −1 olarak verilmiş.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Tam sayı olmayan rasyonel sayıların kümesi aşağıdaki kümelerden hangisine eşittir?*

A) $\mathbb{C} - \mathbb{Q}'$ B) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ C) $\mathbb{Q}' - \mathbb{R}$ D) $\mathbb{Q}' - \mathbb{Z}$ E) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Çözüm: Rasyonel sayılar kümesi, hem kesirli sayıları hem de tam sayıları içermekteydi. Eğer bu kümedeki tam sayılar istenmiyorsa onları kümeden atalım, olsun bitsin. Demek ki tam sayı olmayan rasyonel sayıları ifade etmek için

$$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$$

kullanılabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi 'negatif tam sayılar' kümesi olan $\mathbb{Z}^-$ yerine kullanılabilir?*

A) $\mathbb{Q}–\mathbb{Z}$ B) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}^+$ C) $\mathbb{R}–\mathbb{Q}^+$ D) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ E) $\mathbb{Z}–\mathbb{N}$

Çözüm: Tam sayılar kümesi; negatif tam sayılar, 0 ve sayma sayılarından oluşmaktaydı. 0 ve sayma sayıları, birlikte doğal sayılar kümesini oluşturduğundan tam sayılardan doğal sayıları çıkarınca negatif tam sayıları buluruz. O halde negatif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}–\mathbb{N}$ olarak da gösterilebilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Aşağıdaki kümelerden hangisinin eleman sayısı sonsuz değildir?*

A) $\mathbb{R}–\mathbb{Q}$ B) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}^+$ C) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ D) $\mathbb{Z}–\mathbb{N}$ E) $\mathbb{N}–\mathbb{Z}^+$

Çözüm: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ kümesi, irrasyonel sayılar kümesini oluşturduğundan bu küme sonsuz elemanlıdır.

$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}^+$ kümesi ise pozitif tam sayılar dışındaki rasyonel sayılar manasına gelir ki onlar da sonsuzdur.

$\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ demek, $\mathbb{N}$ demek olduğundan bu küme de sonsuz elemanlıdır.

$\mathbb{Z}–\mathbb{N}$ demek de $\mathbb{Z}^-$ demek olduğundan bu küme de sonsuz elemanlıdır.

Fakat $\mathbb{N} - \mathbb{Z}^+ = \{0\}$ olup bu küme sonsuz elemanlı değil, görüldüğü üzere sadece 1 elemanlıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. '*Herhangi iki elemanı arasında sonsuz sayıda elemanı olan kümelere **yoğun küme** denir.*' *Yukarıdaki tanıma göre aşağıdaki kümelerden hangisi yoğundur?*

A) {0, 1, 2} B) $\mathbb{N}$ C) $\mathbb{Q}$ D) $\mathbb{Z}$ E) $\mathbb{N}^+$

Çözüm: A şıkkındaki kümenin kendisi sonsuz elemanlı değil ki iki elemanı arasında sonsuz eleman olsun! A şıkkını eledik.

Seçilen herhangi iki sayma sayı arasında her zaman sonlu miktarda sayma sayısı vardır. Aynı durum doğal sayılar ve tam sayılar kümesi için de geçerlidir.

Ama rasyonel sayılar kümesi öyle değildir. Seçilen iki farklı rasyonel sayı arasında kalan sonsuz farklı rasyonel sayı bulunabilir. Örneğin a ve b farklı iki rasyonel sayı ise $(a + b)/2$ hem bu iki sayıdan farklı hem de daima bu iki sayı arasındadır. Sonra bu işlemi a ve $(a + b)/2$ ile yapıp sonsuza kadar devam ettirebilirsiniz.

Doğru cevap: C.

Cebirsel Sayılar

Meraklanmayın, yeni bir sayı türünden bahsetmeyeceğiz. Ama hâlihazırda bildiğimiz sayıları, birazdan bahsedeceğimiz bir özelliğe göre sınıflandıracağız. Şimdi meraklanabilirsiniz!

Katsayıları rasyonel sayı olan

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

polinomunun bir kökü olabilen sayılara **cebirsel sayı** denir. Tanımdan, tüm tam sayıların ve tüm rasyonel sayıların cebirsel olduklarını hemencecik çıkarabiliriz. Sözgelimi, 2, tam katsayılı $3x - 6$ polinomunun bir köküyken, 3/5 de tam katsayılı $5x - 3$ polinomunun bir köküdür. Tabii ki bunlar sadece birer örnektir, hepsinin öyle olduğunu kanıtlamaz. Tüm rasyonel sayıların cebirsel olduğunu herhangi bir a/b rasyonel sayısının aslında $bx - a$ polinomunun kökü olduğunu göstererek kanıtlayabiliriz. Hatta sanal sayı birimi olan i'nin de cebirsel olduğunu söyleyebiliriz, çünkü o da nihayetinde tam katsayılı olan $x^2 + 1$ polinomunun köklerinden biridir. İrrasyonellikleriyle meşhur olan $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ gibi, asal sayıların karekökleri olan sayılar da cebirseldir. Çünkü biri $x^2 - 2$ polinomunun köküyken, diğeri $x^2 - 3$ polinomunun, diğeri de $x^2 - 5$ polinomunun köküdür.

Yapılanlara bakınca şunu söylemekte bir mahzur olmasa gerek: Descartes'ın yasal saydığı beş işlem (toplama, çıkarma, çarpma, bölme, kök alma) ile tam sayılardan sonlu adımda türetilebilen sayılar cebirsel sayılardır. Burada akla gelen doğal sorular şunlar olur:

Her sayı cebirsel midir? Her sayı bu işlemlerle elde edilebilir mi? Cebirsel olmayan sayılar var mıdır?
Sırasıyla cevaplar: Hayır, Hayır, Evet!

Aşkın Sayılar

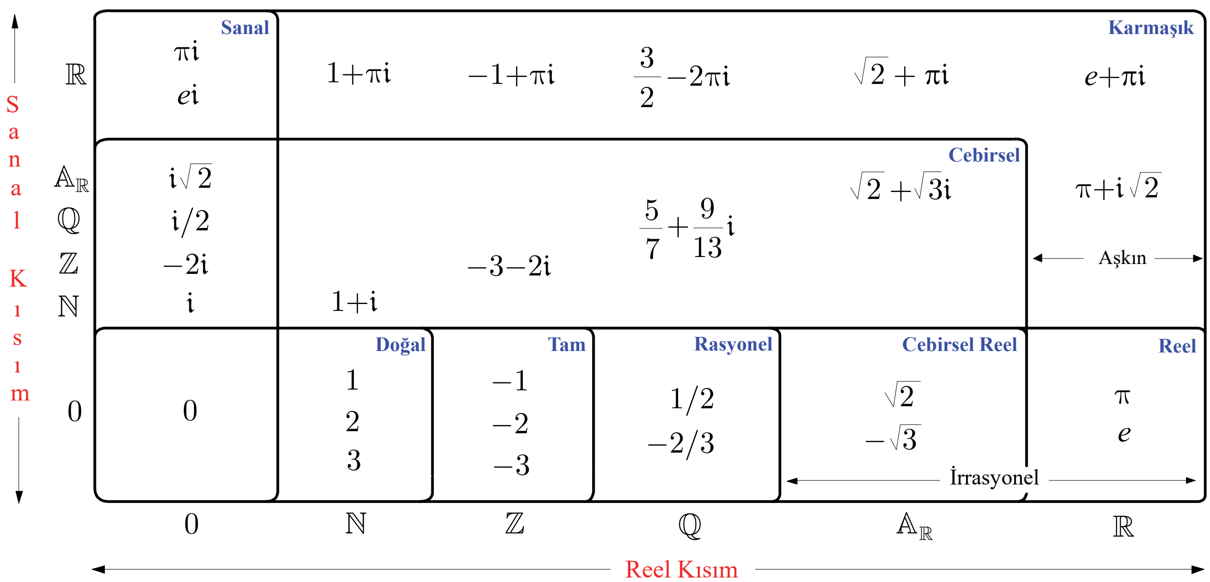
Cebirsel olmayan sayılara **aşkın sayı** denir. Tanım iyi güzel de bu tanım böyle sayıların (varsa eğer!) varlığı veya yokluğu hakkında bir şey söylemiyor. Öteden beri böyle sayıların varlığı sezilmekteydi fakat böyle bir sayıyı ortaya çıkarıp 'işte bu sayı aşkındır, sebebi de şudur şudur' demek her babayiğidin harcı değildi. Cebirsel olmayan bir sayı düşüncesini ilk önce Euler sezmiştir. Cebirsel olmayan reel sayıya da transandantal adını vermiştir, "*because it transcends the operations of algebra*". Bu konuda en büyük şüpheyi üzerlerine çeken sayılar π ve e sayıları olmalarına karşın, sürpriz bir şekilde aşkın olduğu ispatlanan ilk sayı onlardan biri olmamıştır. Euler'den yüz yıl sonra, 1844'te Joseph Liouville aşkın sayıların karakteristik özellikleri üzerine verdiği temel bir teoremle *Liouville Sabiti* olarak anılan ve $n!$'inci ondalık basamağında 1, diğer ondalık basamaklarında 0 yer alan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + ...$$
$$= 0{,}110001000000000000000001000...$$

sayısının aşkın olduğunu gösterip matematiğe kazandırmıştır.

Dikkat ettiyseniz; 1'inci, 2'nci, 6'ncı, 24'üncü, … ondalık basamaklarda 1 varken, diğerlerinde 0 var. Bundan 29 yıl sonra 1873'de Charles Hermite son derece zor bir ispat ile önemli bir irrasyonelin (e) aşkınlığını göstermiştir. π sayısını gözünde çok büyütmüş olacak ki kullandığı tekniğin π'nin de aşkınlığını gösterebileceğini görememiştir. Ondan 9 yıl sonra 1882'de Ferdinand Von Lindemann π sayısının aşkın olduğunu kanıtlamıştır. Ha bu arada, $e + \pi$ ve $e \cdot \pi$ sayılarının transandantal olup olmadıkları hâlâ bilinmemektedir. Bu problemler ellerinizden öper! [*Ekşi Sözlük*]

EULER ŞEMASI



CEVAPLI TEST

1.
Rasyonel, Tam, Doğal, Karmaşık ve Reel sayılar kümelerinin bilinen evrensel gösterimleri hangi şıkta doğru sırada verilmiştir?

A) $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$
C) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ D) $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$
E) $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

2.
Reel sayılar kümesinde olup da rasyonel sayılar kümesinde olmayan sayılar hangileridir?

A) Doğal sayılar B) İrrasyonel sayılar
C) Negatif sayılar D) Tam sayılar
E) Asal sayılar

3.
Pozitif tam sayılar ile sayma sayılarının farkı aşağıdaki kümelerden hangisidir?

A) {0} B) {1} C) {−1} D) $\mathbb{Z}^-$ E) ∅

4.
–3 sayısı $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kümelerinin kaç tanesinin elemanıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.
$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini göstermektedir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi 'irrasyonel sayılar' kümesini gösterir?

A) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ B) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ C) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
D) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ E) $\mathbb{Q}-\mathbb{R}$

6.
Aşağıdaki bilgilerden hangisi doğrudur?

A) Sayma sayıları kümesi, doğal sayılar kümesini kapsar.
B) Rasyonel sayılar kümesi, tam sayılar kümesinin altkümesidir.
C) 3 sayısı bir karmaşık sayıdır.
D) 3 sayısı irrasyoneldir.
E) Reel sayılar kümesi, tüm sayı kümelerini kapsar.

7.
$$0,\ -1,\ \sqrt{2},\ (-2)^{-3},\ \sqrt[3]{-7},\ \frac{2}{3},\ \%\,20,\ \frac{4}{0},\ \sqrt{-9}$$
ifadelerinin kaç tanesi gerçek sayıdır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

8.
$$\mathbb{N}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$
kümelerinin beşinin elemanı olup birinin elemanı olmayan sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −1 B) $2i$ C) 1 D) π E) 0

1. A **2.** B **3.** E **4.** E **5.** C **6.** C **7.** D **8.** E