

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Fonksiyon

Ey şu anda bu notları okuyan vatandaş! Eğer bağıntı konusunu tam manasıyla bilmiyorsan, derhal bu notları okumayı bırak ve bağıntıya çalış, öyle gel!

Fonksiyon

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A 'nın her elemanını B 'nin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen bağıntıya, A 'dan B 'ye bir fonksiyon denir.



Yukarıdaki tanımı satırı satırına ezberlemeyeni derse almayacağımı buradan bildiririm! Yatağa yattığınızda, burada ne anlatılmak istendiğini en az on dakika düşünmeyeni de Allah bildiği gibi yapın! ☺

Neleri düşüneceğinizi yazayım ben size...

Altı çizili kelimelerin neden altının çizildiğini düşünün. Bunların, tanımdan hiçbir surette atılamayacağını anlayın bir kere... Bir fonksiyon tanımlamak için önce elimizde 2 tane boş olmayan küme olmalıymış. Sonra tanımladığımız o fonksiyon denen şey aslında bir bağıntıymış. Bağıntılar bir kümenin elemanını (eğer boş değilse) bir başka kümenin elemanı ile eşlerdi ya, A kümesinde sakın ha sakın B kümesinden bir elemanla eşlenmeyen eleman kalmamalıymış. Ayrıca bu elemanları ne 1'den az, ne de 1'den fazla elemanla eşleyemezmişiz, sadece tek elemanla eşleyecekmişiz. Son olarak da, buna fonksiyon değil, A 'dan B 'ye fonksiyon denirmiş.

Böyle tanımlanan A 'dan B 'ye bir fonksiyon

$$f: A \rightarrow B, A \xrightarrow{f} B \text{ veya } x \mapsto y = f(x)$$

biçimlerinden biri ile gösterilir.

Burada x 'e bağımsız değişken, y 'ye ise bağımlı değişken adı verilir.

Bir bağıntı ne zaman fonksiyon olur?

Çok önemli olan bu durumu iyi anlaşılması umuyla hikâyeleştirmekte fayda görüyorum. Hatta bu durum o kadar önemli ki burayı anlayamayan birinin fonksiyonu anladığından şüphe duyulur, ben şahsen duyarım!

f 'nin A 'dan B 'ye bir bağıntı olduğunu düşünün. A 'nın elemanlarını birer insan, B 'nin elemanlarını da birer otel olarak düşünelim. Hava da oldukça soğuk olsun. Kendini sıcak bir otele atamayanın vay haline!

A 'daki tüm insanların B 'deki otellere yerleşmeleri lâzım. Yani boşta insan kalmamalı. Bununla birlikte, boşta otel kalsa n' olur ki? Hiçbir şey olmaz. Mühim olan her insanın mutlaka bir otele yerleştirilmesidir. Ama bu tek şart değildir. Dikkat etmemiz gereken ikinci husus ise; iki veya daha fazla insanın tek bir otelde kalabileceği ama tek bir insanın aynı anda birden fazla otelde kalamayacağı.

İşte, kabaca, bu iki şartın ikisini birden sağlayan bağıntılara **fonksiyon** diyeceğiz.

Şimdi burada anlattıklarımızı matematiksel örnekler üzerine oturtmaya çalışalım.

Örnek. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ olmak üzere A 'dan B 'ye tanımlanan

$$\begin{aligned} f &: \{(a, 1), (b, 5)\} \\ g &: \{(a, 1), (a, 3), (b, 3), (c, 5)\} \\ h &: \{(a, 3), (b, 1), (a, 1)\} \\ k &: \{(a, 5), (b, 1), (c, 5)\} \\ t &: \emptyset \end{aligned}$$

bağıntılarından hangisi fonksiyondur?

A) f B) g C) h D) k E) t

Çözüm: Önce insanlarımızı ve otellerimizi tanıyalım. a, b, c adında üç insan ve 1, 3, 5 adında üç otelimiz var. Amacımızı unutmayalım. Tüm insanların mutlaka bir otele yerleşmesi lazım ve 1 insanın 1'den fazla otele gitmediğini teyit etmeliyiz. Buna göre;

- ✓ f bağıntısı fonksiyon değildir, çünkü c insanı açıkta kalmış.
- ✓ g bağıntısında otele yerleşmeyen insan yok ama a insanı aynı anda hem 1 hem 3 oteline gitmiş, nasıl olmuşsa? Anlayacağınız g bağıntısı fonksiyon olma şansını yitirdi.
- ✓ h bağıntısı da g bağıntısıyla aynı sorunu taşıyor, dolayısıyla aynı kaderi paylaşıyor, fonksiyon değildir.
- ✓ k bağıntısı, içlerinden fonksiyon olan tek bağıntıdır.
- ✓ ‘Ama 3 oteline kimse gitmemiş ki?’ demiyorsunuz değil mi? Otel boşta kalabilirdi, unutmayın, insan boşta kalmayacak.
- ✓ t 'nin fonksiyon olmasına ise bin şahit ister. Bul gel, olsun! Yoksa olmaz. Fonksiyon tanımını tekrar okursanız anlarsınız.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 3, 4\}$ olmak üzere A 'dan B 'ye tanımlanan aşağıdaki f bağıntılarından fonksiyon olmayan hangisidir?

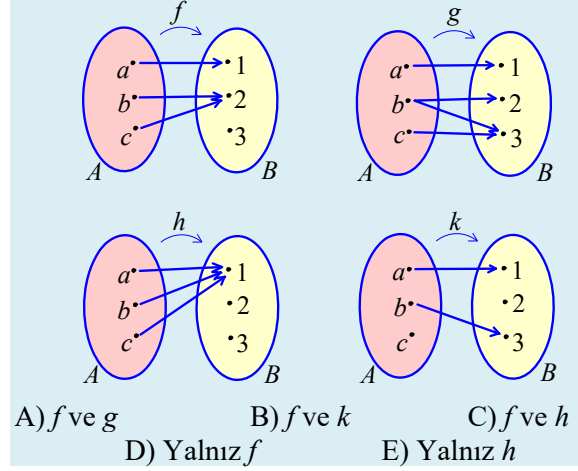
- A) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- B) $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$
- C) $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 3)\}$
- D) $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
- E) $f = \{(1, 4), (2, 3), (2, 2)\}$

Çözüm: Tabii ki E şıkkındaki f bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü A kümesinin elemanı olan 2'yi B kümesinde hem 3'le hem de 2'yle eşlemiş, oysaki buna hakkı yoktu.

Doğru cevap: E.

Her bağıntının fonksiyon olmadığını ama her fonksiyonun bir bağıntı olduğunu hatırlayalım. Bağıntıları şema ile de gösterebiliyorduk. O halde fonksiyonları da şemayla gösterebiliriz. Şimdi de şemaları verilmiş bağıntıların hangisi veya hangilerinin bir fonksiyon olduğunu bulmaya yönelik bir soru çözelim.

Örnek. Aşağıda şemaları verilen f, g, h, k bağıntılarından hangisi veya hangileri bir fonksiyondur?



Çözüm: Dört bağıntı da A 'dan B 'ye tanımlanmış. O halde hepsinde a, b, c birer insan ve 1, 2, 3 birer otel. Uzatmayalım, fonksiyon olan bağıntılar f ve h bağıntılarıdır. g fonksiyon değil çünkü b insanı hem 2, hem de 3 oteline gitmiş. k bağıntısında ise c , herhangi bir otele gitmemiş.

Doğru cevap: C.

Fonksiyon Grafikleri

Bağıntılar şema ile gösterildikleri gibi, bir de grafikleri çizilerek gösterilebilirlerdi. Fonksiyonlar da öyle. Bir bağıntının elemanı olan sıralı ikiliyi koordinat düzleminde bir nokta gibi düşünür ve o noktayı işaretlerdik. Kimi zaman noktalar yan yana gelerek, bir doğru veya doğru parçası görüntüsü meydana getirirdi. Şimdi biz de fonksiyon grafiğindeki doğru, doğru parçası veya eğriler üzerinde noktalar alarak bu noktaların apsilerinin insan, ordinatlarının otel olduğunu düşüneceğiz. Liste yöntemi veya şema ile verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını incelerken ne yapıyorsak, aynılarını burada da yapacağız.

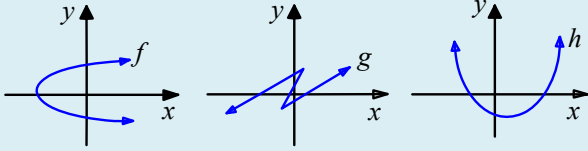
Grafiklerde Fonksiyon Olma Kriteri

Grafiği verilmiş bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını anlamak için şunu yapın:

x eksenini dik kesen farklı doğrular çizin. Yeterince çok olsun. Bu doğrular bağıntının grafiğini her yerde sadece ve sadece tek bir kere kesiyorsa bağıntı fonksiyondur. Bir kere bile olsa herhangi bir noktada kesmiyorsa veya bir kere bile olsa 1'den fazla noktada kesiyorsa, bağıntı kesinlikle fonksiyon değildir.

Bir örnekle anlatmak istediklerimize açıklık getirelim.

Örnek. Aşağıdaki grafiklere sahip



\mathbb{R} 'den \mathbb{R} 'ye tanımlı f , g , h bağıntılarından hangisi veya hangileri bir fonksiyondur?

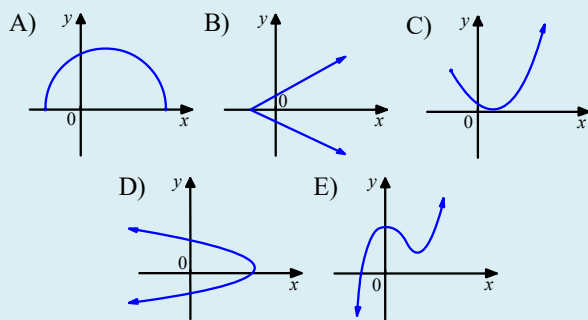
- A) Hiçbiri B) g ve h C) f ve g
D) Yalnız h E) Hepsisi

Çözüm: Eğriler üzerindeki herhangi bir noktanın apsisinin insan, ordinatının otel olduğunu tekrar hatırlatalım. Buna göre f ve g bağıntılarının grafikleri bize kendilerinin fonksiyon olmadıklarını anlatır. Çünkü f eğrisi üzerinde apsisi 0 olan iki farklı nokta, g eğrisi üzerinde de apsisi 0 olan 3 farklı nokta var. Hâlbuki bu imkânsız. Yorumumuz 0 insanın, birinde 2, diğesinde 3 otele gittiğini söylüyor.

Fakat h bağıntısının grafiğinde böyle bir şeye rastlamıyoruz. Yani h eğrisi üzerinde, apsisi aynı olup da ordinatı farklı olan iki nokta yok.

Doğru cevap: D.

Örnek. \mathbb{R} 'den \mathbb{R} 'ye tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi bir fonksiyondur?

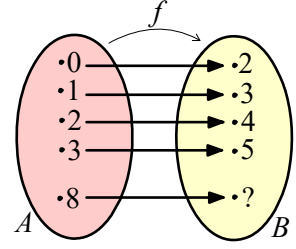


Çözüm: A ve C şıklarındaki fonksiyon adaylarının tanım kümesi tüm reel sayılar olmayıp sadece onun bir alt aralığıdır. B ve D şıklarındaki fonksiyon adaylarının hem tanım kümelerinde sorun var hem de bazı x değerleri için iki farklı y değerlerine sahipler. E şikkındaki ifade ise fonksiyon olabilmek için gereken her şartı sağlamaktadır.

Doğru cevap: E.

Şimdi aşağıda anlattıklarımızı iyi dinleyin:

Yanda verilen f fonksiyonu, sizce, A kümesindeki 8'i, B kümesinde hangi elemanla eşleştirir?

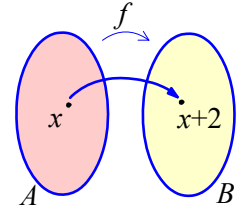


0'ı 2'ye, 1'i 3'e, 2'yi 4'e, 3'ü 5'e götürdüğüne göre 8'i de 10'a götürür diye aklınıza gelmiş olabilir. Gelmesin! Çünkü bunu hiçbir zaman hiçbir kimse bilemez. Nedenini birazdan açıklayacağız.

8 ne zaman 10'a gider biliyor musunuz? f fonksiyonunun herhangi bir sayıyı 2 fazlasına götürdüğünü bildiğimiz zaman. E burada öyle yapmış demeyin, 3 sayısı 1'in illa 2 fazlası değildir ki, karesinin 2 fazlası da olabilir, 2 katının 1 fazlası da. Ama her x sayısını $x + 2$ 'ye gitmiş görürsek, anlarız ki f fonksiyonu yakaladığına 2 ekliyor.

Yandaki f fonksiyonuna göre gerçekten 8 sayısı 10 ile eşlenir.

İşte biz bu durumu $f(8) = 10$ yazarak gösteririz.



Fakat her zaman fonksiyonların şemaları karşımızda olmaz ki. Çizmek de bayağı vakit alıyor. İşte, fonksiyonların kimi nereye götüreceğini bulabilmek için bize bazen bu t olayını başka türlü verirler.

$$f(t) = t + 2$$

derler, biz de anlarız ki fonksiyon yakaladığına 2 ekliyor.

Örnek. \mathbb{R} 'den \mathbb{N} 'ye

$$f(x) = x + 2$$

kuralıyla tanımlanmış bir bağıntı, fonksiyon belirtir mi?

- A) Hayır B) Evet C) Bilinemez

Çözüm: x 'in bir reel sayı iken $(x + 2)$ 'nin daima doğal sayı olduğunu göstermemiz lazım. Tabii ki olabiliyorsa! Olamadığını çoktan anlamışsınızdır.

Örneğin, -3 bir reel sayıdır ama $f(-3) = -1$ olduğundan ve -1 bir doğal sayı olmadığından f bir fonksiyon değildir. -3 yerine tam sayıya eşit olmayan bir kesirli ifade veya bir irrasyonel sayı yazsaydık da bunlara karşılık bulamayacaktık.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f, \mathbb{Z}'den \mathbb{R}'ye$ tanımlanan bir bağıntı olsun.
 $y = f(x)$
 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi fonksiyon belirtmez?

- A) $y = 3x + 5$ B) $y - |x| = 1$ C) $|y| = x - 3$
 D) $2y - x = 2$ E) $y = x^2 - 3x + 1$

Çözüm: Bir bağıntının fonksiyon olma şartını defalarca anlattık. İlk olarak tanım kümesindeki her x , değer kümesinde kendine bir karşılık bulabilecek. Şıklarda herhangi bir x değeri için y 'yi hesaplamadığımız bir durum yok.

Fakat ikinci bir şart daha vardı. Her x 'e sadece bir tane y karşılık gelecekti. C şikkına bakarsanız, bunun gerçekleşmediğini görürsünüz.

Örneğin x 'e 4 verince $y = 1$ de olabiliyor, -1 de. Bunun için $|y| = x - 3$ bağıntısı fonksiyon değildir.

Doğru cevap: C.



Genel olarak, reel sayılarda tanımlanmış, sözgelimi $y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyon kuralında y yazan yerde $|y|$, y^2 , y^4 yazamaz. Çünkü bu durumlarda, verilen kuralı herhangi bir x değeri için 1'den fazla y sağlar.

Örnek. Aşağıdaki

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, f(x) = \frac{3x+2}{3}$$

$$g: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 4x - 1$$

$$h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(x) = x^2 + 3$$

$$k: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, k(x) = x - 2$$

$$m: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+, m(x) = \sqrt{x} + 1$$

fonksiyon adaylarından kaç tanesi fonksiyondur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Sırayla gidelim.

- ✓ A şikkındaki aday fonksiyon değildir. Çünkü, eğer fonksiyon olsaydı tüm doğal sayıları bir doğal sayıyla eşleştirmeliydi. Bırakın tüm doğal sayıları, tek bir doğal sayıyı bile bir doğal sayıyla eşleyemiyor. Çünkü bir doğal sayının 3 katının 2 fazlası hiçbir zaman 3'e tam bölünmez, dolayısıyla cevap doğal sayı çıkmaz.

- ✓ B şikkındaki aday fonksiyondur. Çünkü her tam sayının 4 katının 1 eksiği bir reel sayıdır. Öyle değildir diyen örnek versin, bekliyorum!
- ✓ C şikkındaki aday da fonksiyondur. Çünkü her reel sayının karesinin 3 fazlası yine bir reel sayıdır. Eşleşmeyen de yok, 1'den fazla elemanla eşleşen de yok.
- ✓ D şikkındaki aday fonksiyon değildir. Çünkü, eğer fonksiyon olsaydı her doğal sayıyı bir doğal sayıyla eşleştirmeliydi. Tamam nerdeyse tamamını eşleştirir ama 0 ile 1 doğal sayılarını hiçbir doğal sayıyla eşleyemez, zira bu sayıların 2 eksiği doğal sayı değildir.
- ✓ E şikkındaki aday da fonksiyon değildir. Çünkü, negatif reel sayıların karekökleri reel değildir. Oysaki bağıntı tüm reel sayıları pozitif reel sayılar kümesine götürüyordu. Hadi götürsün de göreyim!

Doğru cevap: C.



Üstteki örnekten de anlamış olduğunuz üzere her ' $f(x) = \dots$ ' ile başlayan ifade fonksiyon değildir. Fonksiyonu fonksiyon yapan şey, nereden nereye tanımlandığıdır. Bu, fonksiyon kuramı için olmazsa olmaz bir olgudur.

Yani temelde,

$$'f(x) = 2x + 3 \text{ ise } f(10) \text{ kaçtır?}'$$

sorusu saçmadır. Bu soru ancak f bir polinomsa anlamlı olabilir. Çünkü f, \mathbb{R}^- kümesinde tanımlanmışsa ne olacak?

Siz siz olun, içinde *tanım kümesi verilmeden sorulmuş fonksiyon soruları* barındıran kitaplardan uzak durun. Onlardan çok güzel *kışlık yakacak* olur ama!

Matematikçiler, elbet bu kadar önemli olan kümeleri isimsiz bırakmayacaklardı. Şimdi isimlerini öğrenelim.

Tanım Görüntü ve Değer Kümeleri

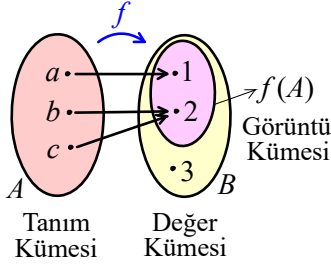
$f: A \mapsto B$ fonksiyonunda A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesine de fonksiyonun **değer kümesi** denir.

A kümesindeki elemanların görüntülerinin kümesine de **görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir.

A 'ya **kalkış kümesi**, $f(A)$ 'ya **varış kümesi** dendiği de olur. (Ali Nesin öyle diyor mesela!)

$$f(A) \subset B$$

olduğuna dikkat edilmelidir.



Tanım kümesi = $A = \{a, b, c\}$
Değer kümesi = $B = \{1, 2, 3\}$
Görüntü kümesi = $f(A) = \{1, 2\}$

Daha önceki hikâyemize göre yorum yapalım:

Tanım kümesi, insanlar kümesi oluyor. Değer kümesi oteller kümesi oluyor. Görüntü kümesi de boş olmayan oteller kümesi oluyor, yani en az 1 kişinin gittiği oteller kümesi.

Örnek. $A = \{-1, 2, 3\}$ olmak üzere, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 4$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümeleri hangi şıkta doğru sırada verilmiştir?

- A) $A, \mathbb{R}, \{3, 6, 7\}$ B) $A, \{3, 6, 7\}, \mathbb{R}$
C) $\mathbb{R}, A, \{3, 6, 7\}$ D) $A, \mathbb{R}, \{-5, -2, -1\}$
E) $\mathbb{R}, A, \{-5, -2, -1\}$

Çözüm: $f: X \rightarrow Y$ notasyonunda X daima tanım, Y de daima değer kümesidir. O halde sorumuzda tanım kümesi A , değer kümesi \mathbb{R} 'dir.

Görüntü kümesi $f(A)$ demek olduğundan, A 'nın elemanlarının teker teker f altındaki görüntülerini bulmalıyız.

$$f(-1) = -1 + 4 = 3$$

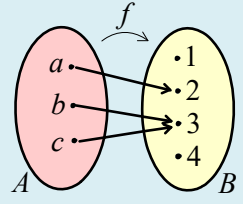
$$f(2) = 2 + 4 = 6$$

$$f(3) = 3 + 4 = 7$$

olduğundan görüntü kümesi $f(A) = \{3, 6, 7\}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. Yan şemada verilen f fonksiyonunun tanım, görüntü ve değer kümelerinin eleman sayılarının toplamı kaçtır?



- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Tanım kümesinin $A = \{a, b, c\}$, bununla birlikte değer kümesinin $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğu sırtıyor zaten. Görüntü kümesi ise $f(A) = \{2, 3\}$ 'tür. O halde sorulan toplam $3 + 4 + 2 = 9$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \{x: x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$ olarak veriliyor.

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için

$$f(x) = \frac{x}{3} + 1$$

olduğuna göre $f(A)$ görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 3 ile tam bölünen tam sayılar kümesi
B) 3'ün katı olan doğal sayılar kümesi
C) Doğal sayılar kümesi
D) Tam sayılar kümesi
E) Rasyonel sayılar kümesi

Çözüm: Öncelikle A kümesini iyi anlamak lâzım. A kümesi tam sayıların 3 katlarından oluşuyormuş. Demek ki her elemanı 3'e tam bölünüyor.

$$f(A) = f(3n) = \frac{3n}{3} + 1 = n + 1$$

olduğunu not edelim. n bir tam sayı olarak verildiğinden $n + 1$ sayısı da tam sayıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi

$$A = \{0, 1\}$$

kümesinde tanımlı bir fonksiyon değildir?

- A) $f(x) = x^2$ B) $g(x) = \sqrt{x}$ C) $h(x) = |x|$
D) $k(x) = 2x$ E) $p(x) = x^3$

Çözüm: A kümesinde tanımlı olmak demek, A kümesinin elemanlarını A kümesinin elemanlarına götürmek demektir. 0 ve 1 sayılarının kareleri, köpleri, karekökleri ve mutlak değerleri 0 ve 1'dir. Fakat bu sayıların 2 katı 0 ve 2 olduğundan k fonksiyonu 1 sayısını A kümesinde götüreceği bir yer bulamaz. Bu yüzden k , $\{0, 1\}$ kümesinde tanımlanamaz.

Doğru cevap: D.

En Geniş Tanım Kümesi

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu düşünelim. Bir reel sayıyı yakaladı mı karesini alıyor. Aynı kurala sahip fonksiyonu $\{1, 2, 3\}$ kümesinde de tanımlayabiliriz değil mi? O zaman sadece 1, 2, 3 değerlerini yakaladı mı karesini alır demek olur, diğer sayılara ne yapacağını bilemeyiz. Yani demem o ki bir fonksiyonun tanım kümesi duruma ve ihtiyaca göre değişebilir. Fakat, sözgelimi $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu hiçbir ahval ve şerait altında, içinde negatif bir reel sayı barındıran bir kümede tanımlamaz. Çünkü negatif sayıların karekökü alınmaz. Bu g fonksiyonunun tanımlanabileceği en geniş küme $[0, +\infty)$ kümesi olabilir.

Uzun lafın kisası, en geniş tanım kümesi fonksiyonun tanımsızlık yaşatmayacağı tüm elemanların kümesidir. Diğer bir deyişle, tüm reel sayılardan arıza çıkaran sayıların atılmasıyla geriye kalan kümedir.

Örnek.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{|x| - 1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı hangisidir?

- A) \mathbb{R} B) $\mathbb{R} - \{1\}$ C) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
D) $\mathbb{R} - \{64\}$ E) $\mathbb{R} - \{-1\}$

Çözüm: Tehlike sadece paydanın 0 olduğu durumda var. $|x|$ değeri -1 ve 1 değerlerinde 1 olacağından payda 0 olur. Bu değerleri reel sayılar kümesinden atarsak en geniş tanım kümesini elde ederiz.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$f(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt[3]{x+1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, 6)$ B) $(-1, 6)$ C) $(6, +\infty)$
D) $[6, +\infty)$ E) \mathbb{R}

Çözüm: Fonksiyonun en geniş tanım aralığı demek, tanım kümesinde f 'nin fonksiyon olmasını bozmayacak tüm elemanların kümesi demektir. Hani bazı x 'ler için bu ifade reel sayılar kümesinde hesaplanamaz ya, işte bu ifadeyi reel yapmayan sayıları, tanım kümesine dâhil etmeyeceğiz.

Küpköklü ifade için sorun yoktur, sadece kareköklü ifadenin kök içi negatif olmamalıdır.

$$x - 6 \geq 0 \text{ ise } x \geq 6.$$

Dolayısıyla en geniş tanım aralığı $[6, +\infty)$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f: A \rightarrow B$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-4} + 1}{12 - \sqrt{x+9}}$$

fonksiyonu tanımlansın. En geniş A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, 4)$ B) $[4, +\infty)$ C) $(-9, +\infty)$
D) $[-9, +\infty) - \{135\}$ E) $[4, +\infty) - \{135\}$

Çözüm: Yine ifadenin içinde kareköklü ifadeler olduğundan, kök içlerini negatif yapmamalıyız, ayrıca ifade kesirli olduğundan paydayı da sıfır yapmaktan çekinmeliyiz. Başka görünen tehlike yok.

Hem $x - 4 \geq 0$ olması gerektiğinden $x \geq 4$ olmalıdır, hem de $x + 9 \geq 0$ olması gerektiğinden $x \geq -9$ olmalıdır. O halde ikisini de birden sağlayan aralığı almalıyız. Diğer yandan $x = 135$ olursa payda sıfır olur. Bunun da tanım kümesinden atılması lazım gelir. En geniş tanım aralığı: $[4, +\infty) - \{135\}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Tabloyu doldurunuz.

$f(x)$	En Geniş Tanım Kümesi
$\frac{1}{x-2}$	
$\frac{1}{x^3-9x}$	
$\sqrt{10-5x}$	
$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$	
$\frac{x-4}{ x-1 -3}$	

CEVAPLI TEST

1.

$A = \{a, b\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olmak üzere A 'dan B 'ye tanımlanan

$$f: \{(a, 2)\}$$

$$g: \{(a, 1), (b, 1)\}$$

$$h: \{(a, 2), (b, 2)\}$$

$$k: \{(b, 1)\}$$

bağıntılarından kaç tanesi fonksiyon belirtir?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

f, \mathbb{Z} 'den \mathbb{R} 'ye tanımlanan bir bağıntı olsun.

$$y = f(x)$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi fonksiyon belirtmez?

- A) $y = 3x + 12$ B) $y = |x| + 11$ C) $y = x^2 + 10$
D) $y = x^x$ E) $y = 2^x + 9$

3.

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ifadesinin bir fonksiyon belirtmesi için A aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) \mathbb{R} B) \mathbb{Q} C) \mathbb{N}^+ D) \mathbb{N} E) \mathbb{Z}

4.

$$f(x) = \frac{x-3}{(1-x^2)(x^2-4)}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) \mathbb{R} B) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ C) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 4\}$
D) $\mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ E) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$

5.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 1$$

fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

- A) \mathbb{R} B) \mathbb{Q} C) \mathbb{Z} D) \mathbb{N}^+ E) \mathbb{N}

6.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x-3}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(0, \infty)$ B) $(3, \infty) - \{4\}$ C) $(4, \infty)$
D) $[3, 7)$ E) $[3, \infty) - \{7\}$

7.

$A = \{x: x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ olarak veriliyor. $f: A \rightarrow B$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olur

- A) Çift doğal sayılar kümesi
B) Tek doğal sayılar kümesi
C) Çift tam sayılar kümesi
D) Tek tam sayılar kümesi
E) 3'ün katı olan tam sayılar kümesi

8.

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ olabilir?

- A) $\frac{x-2}{x-3}$ B) $\frac{x-3}{x-2}$ C) $\frac{1}{x^2-5x+6}$
D) $(x-3)^{x-2}$ E) $(x-2)^{x-3}$

1. C 2. D 3. C 4. E 5. D 6. E 7. D 8. C