

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Eşitsizlikler

Sayılar dersinin sonunda bu dersin başını görmüştük. O zamanlar adına "sadece birinci dereceden denklemleri içeren" manasında *Basit Eşitsizlikler* demiştik. Şimdi de daha büyük dereceden denklemleri içeren *Zor Eşitsizlikler*'e geldik. ☺

Eşitsizlik çözmek, kuralı x 'e bağlı bir f fonksiyonunun hangi x değerleri için pozitif, hangi x değerleri için negatif ve hangi x değerleri için sıfır olduğunu bulma işlemidir. Bu x değerlerinin bulunduğu en geniş aralığa **çözüm aralığı** denir. Çözüm aralığını çözümlerimizde Ç.A. diye göstereceğiz. Kuralı birinci dereceden bir polinom olan fonksiyonlar için eşitsizlik çözmeyi öğrenmiştik. Şimdi de daha büyük dereceden fonksiyonlar için öğreneceğiz. Önce birinci dereceden olanları nasıl çözdüğümüzü hatırlayalım:

Örnek.

$$4x - 8 < 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -2)$ B) $(-\infty, -2]$ C) $(-\infty, 2)$
D) $(2, +\infty)$ E) $[2, +\infty)$

Çözüm: İstemediğiniz kadar çok yol var. Biz iki tanesini vereceğiz. Siz bu tip soruları birinci yoldan çözeceksiniz ama ikinci yol daha büyük dereceden eşitsizlikleri çözerken kullanacağımız yol olacak, ona da bakın, alıştırma olsun.

Birinci yol. Sanki eşitlikmiş gibi davranacağız.

$$\begin{aligned} 4x - 8 &< 0, \\ 4x &< 8, \\ x &< 2. \end{aligned}$$

İkinci yol. $4x - 8 = 0$ denkleminin kökünü, yani 2'yi bir kenara yazın. Bir sayı doğrusu çizip üzerinde de işaretleyebilirsiniz, size kalmış. Sonra fonksiyonun kuralının başkatsayısının işaretini 2'nin sağına yazın, zıt işaretlisini de soluna. Şöyle yani:

$$- \quad (2) \quad +$$

Bize $f(x)$ 'in sıfırdan küçük olduğu (yani negatif olduğu) yerler sorulduğundan, bu da bizim tasvirimizde 2'nin solunda bulunduğundan, çözüm aralığının 2'den küçük sayılar olduğunu anlarız.

Bunu $x < 2$ şeklinde gösterebileceğimiz gibi, canımız isterse $(-\infty, 2)$ şeklinde de gösterebiliriz.

Doğru cevap: C.

Birinci dereceden eşitsizlikleri çözerken bu son metoda hiç gerek yok ama daha büyük dereceden eşitsizliklerde ilaç gibi geliyor. Hemen mertebeyi yükseltiyoruz. Konu anlatımını, soruyu çözerken yapayım.

Örnek.

$$(x - 2) \cdot (x + 5) < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -5)$ B) $(-5, +\infty)$ C) $(-\infty, 2)$
D) $(-5, 2)$ E) $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

Çözüm: Bu sefer eşitsizliğimiz ikinci dereceden olduğundan 2 kökümüz var. Hem de birbirinden farklı iki kök. Hemen bunları bir kenara boy sırasına göre diziyoruz, küçükten büyüğe:

$$(-5) \quad (2)$$

Bu iki sayı, üzerini işaretlediğiniz sayı doğrusunu üç parçaya ayırır. -5'in solu, -5 ile 2 arası ve 2'nin sağı diye. İşte o 2'nin sağına fonksiyonun başkatsayısının işaretini yazacağız. Eğer fonksiyonun kuralı çarpanlarına ayrılmış halde bize verilmişse, fonksiyonu oluşturan çarpanların başkatsayılarının işaretlerinin çarpımını en sağa yazarız, ki burada bu "+" oluyor, sonra sola doğru bir zıt işareti, bir aynı işareti yazacağız:

$$+ \quad (-5) \quad - \quad (2) \quad +$$

Bize soruda fonksiyonun sıfırdan küçük olduğu yani negatif olduğu yerler sorulduğundan, bu da tasvirimizde -5 ile 2 arasında görüldüğünden cevabımız $(-5, 2)$ olmalıdır.

Doğru cevap D.

Örnek.

$$(x - 2) \cdot (x + 5) \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -5]$ B) $[-5, +\infty)$ C) $(-\infty, 2]$
D) $[-5, 2]$ E) $(-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$

Çözüm: Bu sefer bir önceki örneğe göre köklerin değişmeyeceğini görünüz. Sadece önceden -5 ve 2 değerleri eşitsizliği sağlamıyordu, şimdi sağlıyorlar, o halde bu kökleri de çözüme dahil edeceğiz:

$$\text{Ç.A.: } [-5, 2].$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\frac{x-2}{x+5} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -5)$ B) $(-5, +\infty)$ C) $(-\infty, 2)$
D) $(-5, 2)$ E) $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

Çözüm: Yine kökler aynı, bu yüzden ilk çözümler bir farkı yok.

$$\text{Ç.A.: } (-5, 2).$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\frac{x-2}{x+5} \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -5]$ B) $[-5, 2)$ C) $(-5, 2]$
D) $[-5, 2]$ E) $(-\infty, -5) \cup [2, +\infty)$

Çözüm: Hatırlarsanız, çarpanlar çarpım durumundayken soruda " < 0 " yerine " ≤ 0 " dediğinde, her iki kökü de çözüme almıştık. Şimdi de öyle yapmamız gerekir ama bu sefer $x + 5$ çarpanı paydada olduğundan -5 değeri eşitsizliği sağlamaz. O halde cevap olarak $(-5, 2]$ demeliyiz. Unutmayın ki, kaçınıcı dereceden olursa olsun, hiçbir zaman paydanın köklerini çözüme dahil edemeyiz.

Doğru cevap: C.

Pratik yol. Bu çözümlerden sonra, ikinci dereceden eşitsizliklerin çözümüyle ilgili şöyle bir genelleme yapabiliriz: Başkatsayıların çarpımı pozitifken,

" < 0 " denmişse kökler arası,

" > 0 " denmişse köklerin dışı

çözüm olur. Başkatsayıların çarpımı negatifken,

" < 0 " denmişse kökler dışı,

" > 0 " denmişse kökler arası

çözüm olur.



Kökleri çözüm aralığına dahil edip etmeyeceğimiz, eşitliğin verilip verilmemesiyle ilgilidir, bir de ifadenin payda mı paydada mı olduğuyla.

3 ve daha büyük dereceden eşitsizlik çözümleri

Buradaki yolun, birinci dereceden eşitsizliklere uyguladığımız ikinci yoldan ve ikinci dereceden eşitsizliklere uyguladığımız tüm yollardan hiç farkı yok. Sadece burada kök sayısı daha fazla oluyor, o da bazen, ama teknik değişmiyor.

Örnek.

$$(x + 5) \cdot (x - 2) \cdot x \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-5, 2)$ B) $[-5, 2]$ C) $[-5, 0] \cup [2, \infty)$
D) $[-5, 0) \cup (2, \infty)$ E) $[-5, 0) \cup [2, \infty)$

Çözüm: Derhal üç kökü de yazalım, hem de boy sırasında.

$$(-5) \quad (0) \quad (2)$$

Üç çarpanın üçünün de başkatsayıları pozitif, o halde üç pozitif sayının çarpımı da pozitif olacağından en sağa "+" yazacağız. Sonra bir zıt işareti, bir kendisi, bir zıt işareti, bir kendisi diye sola doğru ilerleyeceğiz.

$$- \quad (-5) \quad + \quad (0) \quad - \quad (2) \quad +$$

Eşitsizlik " ≥ 0 " durumunda olduğundan hem "+" yazan aralıkları hem de kökleri alacağız. O halde cevabımız:

$$\text{Ç.A.: } [-5, 0] \cup [2, \infty).$$

Sonsuza giden ifadelerin her zaman açık parantezle gösterildiğini de tekrar hatırlatalım.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$\frac{-x+3}{x^2-x-2} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif tam sayıyla en küçük pozitif tam sayının toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Kökleri yazacağız ama payda çarpanlarına ayrılmış durumda olmadığından kökler bir bakışta görünmüyor. Hemen paydayı da çarpanlarına ayırıyoruz:

$$\frac{-x+3}{x^2-x-2} = \frac{-x+3}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

Derhal üç kökü de boy sırasında yazalım:

$$(-1) \quad (2) \quad (3)$$

Üç çarpanın başkatsayılarının işaretlerinin çarpımı negatif olduğundan en sağa "-" yazıyoruz, gerisi bildiğiniz gibi:

$$+ \quad (-1) \quad - \quad (2) \quad + \quad (3) \quad -$$

Fonksiyonun sıfırdan büyük veya sıfıra eşit olduğu yerler sorulduğundan "+" yazan yerleri alacağız, eşitlik olduğundan kökleri de alacağız ama paydada olanları değil, payda olanları.

$$\text{ÇA} : (-\infty, -1) \cup (2, 3].$$

Görüldüğü üzere eşitsizlikleri sağlayan en büyük negatif tam sayı -2, en küçük pozitif tam sayı da 3 olduğundan bu iki değerın toplamı $-2 + 3 = 1$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$(1-m)x^2 + 4x + m^2 - 4 = 0$$

denkleminin biri pozitif, diğeri negatif iki gerçel kökü varsa m 'nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(1, \infty)$ B) $(-2, 2)$ C) $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
D) $(-2, 1) \cup (2, \infty)$ E) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$

Çözüm: Köklerin biri pozitif, biri negatifse bu durum kökler çarpımının negatif olmasını gerektirir. Hemen c/a formülünden kökler çarpımını yazalım.

$$\frac{m^2 - 4}{1 - m} < 0$$

eşitsizliğini çözmek gerekiyor. Şimdi burada bulunan kökleri küçükten büyüğe doğru sıraya dizelim:

$$+ \quad (-2) \quad - \quad (1) \quad + \quad (2) \quad -$$

Tablodan m 'nin $(-2, 1) \cup (2, \infty)$ aralığında olması gerektiğini anlıyoruz.

Doğru cevap: D.

Bir de daha daha büyük dereceden bir eşitsizlik çözelim ki hepsinin çocuk oyuncağı olduğuna ikna olun.

Örnek.

$$\frac{x \cdot (-x+3) \cdot (4-x)}{(x-2) \cdot (x+1) \cdot (-x-5)} \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -5) \cup [-3, -1) \cup (-1, 2] \cup [4, \infty)$
B) $(-\infty, -5) \cup (-1, 0] \cup (2, 3] \cup [4, \infty)$
C) $(-\infty, -4) \cup (-1, 0] \cup (2, 3] \cup [5, \infty)$
D) $(-5, -1) \cup (0, 2] \cup (3, 4]$
E) $(-5, -1) \cup [0, 2) \cup [3, 4]$

Çözüm: Kökler sırtıyor, hemen boy sırasında kaydedelim:

$$(-5) \quad (-1) \quad (0) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

Çarpanların başkatsayıları üç pozitif, üç negatif sayıdan oluştuğundan çarpımları negatif olur, en sağa "-" yazıp, sola doğru anlattığımız üzere ilerleyin.

$$- \quad (-5) \quad + \quad (-1) \quad - \quad (0) \quad + \quad (2) \quad - \quad (3) \quad + \quad (4) \quad -$$

Fonksiyonun sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olduğu yerler sorulduğundan, "-" yazan yerleri alacağız, eşitlik de verildiğinden payın köklerini de. O halde, Ç.A. : $(-\infty, -5) \cup (-1, 0] \cup (2, 3] \cup [4, \infty)$

Doğru cevap: B.

Örnek. Kendisiyle 4 eksiğinin çarpımının, 2 fazlası ve 1 eksiğiyle çarpımına oranı negatif olan en küçük pozitif tamsayı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Problemi matematik diline çevirecek olursak

$$\frac{x \cdot (x-4)}{(x+2) \cdot (x-1)} < 0$$

eşitsizliğiyle karşılaşırız. Kökleri boy sırasında yazar ve işaretleri yerleştirirsek,

$$+ \quad (-2) \quad - \quad (0) \quad + \quad (1) \quad - \quad (4) \quad +$$

tablosundan çözüm aralığının $(-2, 0) \cup (1, 4)$ olduğu çıkar. O halde cevabımız 2 olmalıdır.

Doğru cevap: B.



per olsun!

Hemen aşağıdaki soruları çözebil-
mek, buraya kadar anlatılan her şeyi
çok iyi anlamış olmak demektir. Lütfen
çözüme bakmadan önce kendi
başınıza çözmeyi deneyin ki tam sü-

Örnek. $a^4 < a$ ve $b < |b|$ iken

$$\frac{(2x-a)bx}{ax-1} \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[\frac{a}{2}, \frac{1}{a})$ B) $[\frac{1}{a}, \frac{a}{2})$ C) $[\frac{1}{a}, \frac{a}{2}]$
D) $(-\infty, 0] \cup [\frac{a}{2}, \frac{1}{a})$ E) $(-\infty, 0] \cup (\frac{1}{a}, \frac{a}{2}]$

Çözüm: a 'nın pozitif basit kesir ve b 'nin de negatif olduğu gizli kapaklı verilmiş, hemen onu gördük, şimdi sorunun çözümüne geçiyoruz:

Kökler $\frac{a}{2}$, 0 ve $\frac{1}{a}$ olduğunu not edelim ama bunları küçükten büyüğe sıraya dizmek gerekecek. a pozitif basit kesir olduğundan (a 'ya aklımızdan $1/2$ değerini verebilirsiniz) küçükten büyüğe doğru sıradur:

$$(0) \quad (\frac{a}{2}) \quad (\frac{1}{a})$$

Çarpanların başkatsayıları 2, b ve a olduğundan başkatsayılar çarpımı $2ab$, yani negatiftir, o zaman en sağa "-" yazacağız:

$$+ (0) - (\frac{a}{2}) + (\frac{1}{a}) -$$

Fonksiyonun sıfırdan büyükeşit değer aldığı yerler sorulduğundan çözüm aralığımız $(-\infty, 0] \cup [\frac{a}{2}, \frac{1}{a})$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $a < 0 < b$ olmak üzere

$$\frac{ax+b}{bx-a} \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}]$ B) $[\frac{a}{b}, -\frac{b}{a})$ C) $[\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}]$
D) $(-\infty, 0] \cup (\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}]$ E) $(0, +\infty] \cup (\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}]$

Çözüm: Payın kökü $-b/a$, paydanın kökü ise a/b 'dir. Şimdi bu değerleri boy sırasına dizeceğiz. a ile b zıt işaretli olduğundan ilk kök pozitif, ikinci kök negatiftir. Dolayısıyla sıra şu şekildedir:

$$(\frac{a}{b}) \quad (-\frac{b}{a})$$

Başkatsayıların işaretleri çarpımı negatif olduğundan

$$- (\frac{a}{b}) + (-\frac{b}{a}) -$$

şeklinde bir tablomuz olur. Buradan da çözüm aralığı

$$(\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}]$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $0 < a < 1$ iken

$$\frac{x-a^2}{a^3-x} \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(a^2, a^3]$ B) $[a^2, a^3)$ C) $[a^3, a^2]$
D) $[a^3, a^2)$ E) $(a^3, a^2]$

Çözüm: Pay ile paydanın köklerinin a^2 ve a^3 olduğunu görelim. Yalnız $0 < a < 1$ iken $a^3 < a^2$ olduğunu da hatırlayalım. O halde tablomuz

$$- (a^3) + (a^2) -$$

şeklinde olup çözüm aralığımız $(a^3, a^2]$ olur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST

1.

$$2x^2 - 8 < 0$$

eşitsizliğin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B) $(-\infty, -2]$ C) $(-2, 2)$
D) $[2, +\infty)$ E) $[-2, 2]$

2.

$$(x-2)(x-3) > 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ B) $(2, 3)$ C) $[2, 3)$
D) $(-2, +\infty)$ E) $(-2, +\infty) \cup (3, +\infty)$

3.

$$\frac{x-3}{2x+4} > 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-2, 3)$ B) $[-2, +\infty)$ C) $(-\infty, 3)$
D) $[-2, 3)$ E) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

4.

$$2x^2 - 3x + 1 \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$(2x-6)(x+3)(x-2) \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -3] \cup [2, 3]$ B) $[-3, 2)$
C) $[-3, 2] \cup [3, +\infty)$ D) $[-3, 2) \cup (3, +\infty)$
E) $(-3, 2) \cup (3, +\infty)$

6.

$$\frac{(x-2)x}{3x-9} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

7.

$$(x-3)(5-x) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

8.

$$(5-x)(x+2)x \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) -2 B) 0 C) 1 D) 4 E) 5

9.

$$\frac{6-x}{x(3-x)} \leq 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, 0) \cup (3, 6)$ B) $[0, 3] \cup [6, +\infty)$
 C) $(-\infty, -3) \cup [0, 6]$ D) $(-\infty, 0) \cup (3, 6]$
 E) $(-\infty, -3) \cup (0, 6]$

10.

$$(x-2)(2x^2 + 4x - 30) \leq 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -5] \cup [2, 3]$ B) $(-5, 2) \cup (3, +\infty)$
 C) $(-\infty, -5] \cup (2, 3)$ D) $[-5, 2) \cup [3, +\infty)$
 E) $(-\infty, -5) \cup (2, 3)$

11.

$$(3x-2)^2 - (x+4)^2 < 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\frac{1}{2}, 2)$ B) $(-\frac{1}{2}, 3)$ C) $(\frac{1}{2}, 3)$
 D) $(-3, \frac{1}{2})$ E) $(-1, \frac{1}{2})$

12.

$$x^2 - 9 < 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -3)$ B) $(-3, 0)$ C) $(0, 3)$
 D) $(-3, 3)$ E) $(3, +\infty)$

13.

$$x^2 - x \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ B) $[0, 1]$ C) $[1, +\infty)$
 D) $[-1, 1]$ E) $[0, +\infty)$

14.

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane tam sayı değeri vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15.

$$\frac{3x-4}{6} - \frac{3+x}{3} < \frac{x+5}{9}$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

16.

$$\frac{x-1}{x+5} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -1)$ B) $(-5, -1)$ C) $(-5, 1)$
D) $(-1, 5)$ E) $(1, 5)$

17.

$$\frac{x-2}{x+3} \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -3]$ B) $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$ C) $(-3, 2]$
D) $[-3, +\infty)$ E) $[2, +\infty)$

18.

$$(16-x^2) \cdot (x-1) < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -4)$ B) $(\infty, -4) \cup (1, 4)$
C) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ D) $(-4, 1) \cup (4, +\infty)$
E) $(1, +\infty)$

19.

$$\frac{2x-6}{5x+10} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20.

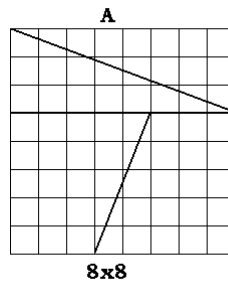
$$2^x \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

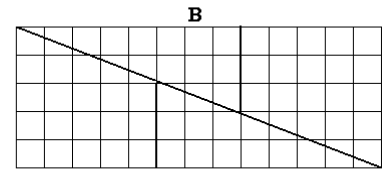
- A) \mathbb{R} B) $(-\infty, 0)$ C) $(0, +\infty)$
D) $(-2, 0)$ E) \emptyset

CEVAP ANAHTARI

1	C	2	A	3	E	4	A	5	C	6	C
7	B	8	E	9	D	10	A	11	B	12	D
13	A	14	D	15	A	16	C	17	B	18	D
19	E	20	E								



8x8



13x5

A karesini şekildeki gibi parçalayıp B dikdörtgenini oluşturalım. Yoksa $8 \times 8 = 13 \times 5$ mi?!