Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyonların Limiti

Okuduğunuz bu satırların yazarının, yani bendenizin, aynı ayın aynı gününde ama 4 yıl arayla doğmuş iki kızı vardır. Büyüğünün adı Neslihan, küçüğünün adı da Ceylin'dir. Anlayacağınız Ceylin doğduğunda Neslihan'ın da doğum yıldönümüydü. Her ne kadar Neslihan ''Ben ondan 5 yaş büyüğüm, çünkü bugün ben 5'e girdim, o daha 0 yaşında!'' dese bile yaşları farkı hep 4 olacak. Hem de tamı tamına 4. Çünkü aynı gün doğdular.

Lafı şuraya getireceğim: Yaşları farkının hep sabit kalacağını biliyoruz, peki yaşları oranı n'olacak? Bu arada, hani derler ya ''Hiç ölmeyecekmiş gibi bu dünya için, yarın ölecekmiş gibi ahret için çalışın!'' diye, siz de bu problemi kızlarım hiç ölmeyeceklermiş gibi çözün. ☺

[2008/MY:] Şu an Neslihan 5 yaşında, Ceylin ise 1 yaşında olduğundan N/C = 5 ve C/N = 1/5, peki gelecek sene bu oranlar değişecek mi? Bakalım. Gelecek sene Neslihan 6, Ceylin ise 2 yaşında olacağından N/C oranı 3'e düşecek, C/N oranıysa 1/3'e çıkacak. Ondan 1 sene sonra ise N/C oranı 7/3'e düşecek, C/N oranıysa 3/7'ye çıkacak. N/C oranının devamlı azalacağını, C/N oranınınsa devamlı artacağını anlamış olmalısınız. Peki bu oranlar bir yerde birleşecekler mi? Birleşeceklerse nerde? Birleşmeyeceklerse neden? Bunu inceleyeceğiz. N/C ve C/N oranlarının yıllar geçtikçe değerlerini gösteren 2008 yılına göre bir tablo yapalım.

	1 Yıl sonra	2 Yıl sonra	3 Yıl sonra	10 yıl sonra	20 yıl sonra	50 yıl sonra
N/C	3.000	2.333	2.000	1.363	1.190	1.078
C/N	0.200	0.428	0.500	0.733	0.840	0.927

Biraz da abartalım:

100 yıl sonra N/C = 1.039, C/N = 0.961
500 yıl sonra N/C = 1.007, C/N = 0.992

Fark etmiş olmalısınız. N/C oranı azalarak 1'e yaklaşıyor, C/N oranıysa artarak 1'e yaklaşıyor. Peki iki orandan biri herhangi bir zaman 1 olabilir mi? Hayır, oranının 1 olması ''Öyle bir gün gelecek ki iki kızım da aynı yaşta olacak!'' demek. Bu da mümkün değil.

Dikkat ettiyseniz oranların 1 olamamaları 1'e yaklaşmalarını engellemiyor. İşte biz bu duruma matematikte, N/C oranının limiti 1'dir deriz. Hatta C/N oranının da limiti 1'dir.

Yukarda anlattığımız hikayeyi, N/C ve C/N oranlarını fonksiyon şeklinde yazarak şöyle matematikleştirebiliriz:

N/C oranı günümüzden x yıl sonra $\dfrac{5+x}{1+x}$ olacağından

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5+x}{1+x}\right)=1,$$

benzer şekilde x yıl sonra C/N oranı $\dfrac{1+x}{5+x}$ olacağından

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{5+x}\right)=1.$$

Fonksiyonların x (yani değişken) sonsuza giderken limiti bulunabileceği gibi, x herhangi bir reel sayıya giderken de limiti bulunabilir. Bunu da başka bir fonksiyon ile izah edelim.

Örneğin,

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=3x$$

fonksiyonunu ele alalım. x sayısı 4'e yaklaşırken $f(x)$'in kaça yaklaştığını bulacağız. Tahmini zor olmasa gerek, biz yine de bakalım. Tabi x'e nerden yaklaştığın da önemli. 4'ten küçük sayılardan artarak da olabilir, 4'ten büyük sayılardan azalarak da… Önce 4'ten küçük sayılardan, arta arta 4'e yaklaşalım bakalım:

$x = 3{,}8$ iken $y = f(3{,}8) = 3\cdot(3{,}8) = 11{,}4$
$x = 3{,}9$ iken $y = f(3{,}9) = 3\cdot(3{,}9) = 11{,}7$
$x = 3{,}95$ iken $y = f(3{,}95) = 3\cdot(3{,}95) = 11{,}85$
$x = 3{,}99$ iken $y = f(3{,}99) = 3\cdot(3{,}99) = 11{,}97$
$x = 3{,}999$ iken $y = f(3{,}999) = 3\cdot(3{,}999) = 11{,}997$

Görüldüğü üzere x, 4'e yaklaşırken y değeri ayan beyan 12'ye yaklaşıyor. Bu durumu artık

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 12$$

yazarak göstereceğiz. 4'ün üzerindeki "–" işareti 4'e sayı doğrusu üzerinde sol taraftan yani 4'ten daha küçük sayılardan yaklaştığımızı anlatmaya çalışır. Bir de 4'e, 4'ten daha büyük sayılardan azala azala yaklaşalım bakalım:

$x = 4{,}1$ iken $y = f(4{,}1) = 3\cdot(4{,}1) = 12{,}3$
$x = 4{,}05$ iken $y = f(4{,}05) = 3\cdot(4{,}05) = 12{,}15$
$x = 4{,}01$ iken $y = f(4{,}01) = 3\cdot(4{,}01) = 12{,}03$
$x = 4{,}001$ iken $y = f(4{,}001) = 3\cdot(4{,}001) = 12{,}003$

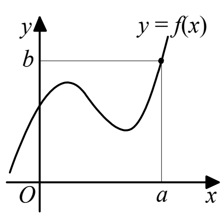
Görüldüğü üzere, x, 4'e sağdan yani 4'ten daha büyük sayılardan yaklaşırken y yine ayan beyan 12'ye yaklaşıyor. Bu durumu da artık

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 12$$

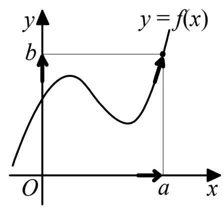
yazarak göstereceğiz. Burada 4'ün üzerindeki ''+" işareti de 4'e sayı doğrusunda sağ taraftan yaklaştığımızı anlatır.

İşte burada olduğu gibi, x herhangi bir sayıya soldan veya sağdan yaklaşırken y'nin yaklaştığı sayı aynı reel sayıysa, fonksiyonun o noktada limiti vardır denir ve limit değeri y'nin yaklaştığı reel sayıdır.

Limit hesaplamalarında fonksiyonun grafiğini düşünmek çoğu zaman çok faydalıdır. Neyi düşünmemiz gerektiğini anlatayım. Örneğin aşağıda belli bir aralıkta grafiği çizilmiş, (a, b) noktasından geçen f fonksiyonunun a noktasındaki limitini bulmaya çalışalım.

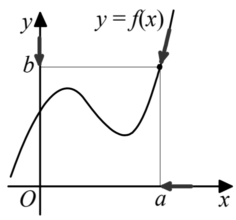


Elinizi fonksiyon grafiğinin üzerine koyun ve grafik üzerinde sol taraftan sağ tarafa doğru hareket ettirin. Eliniz fonksiyon üzerinde a apsisli noktaya yani (a, b) noktasına doğru giderken üzerinden geçtiğiniz noktaların ordinatlarının siz tam o noktaya yaklaşırken kaça doğru yaklaştığına bakın.



Göreceksiniz ki, (a, b) noktasına yaklaştıkça, ordinatlar da b'ye yaklaşıyor. Gönül rahatlığıyla söyleyebilirsiniz ki $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$'dir.

Şimdi de sağ taraftan sol tarafa yaklaşalım.



Yine göreceksiniz ki, grafiğin sağ tarafından (a, b) noktasına yaklaşırken, üzerinden geçtiğiniz noktaların ordinatları azalarak b'ye doğru gidiyor.
O halde $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$'dir.

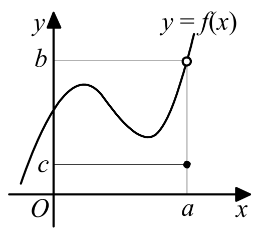
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

olduğundan da $\lim_{x\to a} f(x) = b$'dir.

Dikkat ettiyseniz, limiti belirlerken hiç ama hiç

$$f(a) = b$$

mi değil mi diye ilgilenmiyoruz. Yani, grafik



şeklinde olsaydı da $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olacaktı. Fonksiyon a'da tanımsız ya da b dışında başka bir sayı olarak tanımlı olsaydı bile…

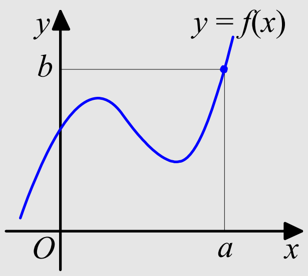
Bir fonksiyonun belirli bir a reel sayısında bir görüntüye sahip olması ya da olmaması fonksiyonun o noktadaki limitini etkilemez, "sürekli" olup olmadığını etkiler.

Nedir bu "süreklilik"?

$f: A \mapsto \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere, $x = a$ noktasında üç durumla karşılaşabiliriz:

- ✓ Ya $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ yoktur,
- ✓ Ya $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ vardır fakat $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$'dır,
- ✓ Ya da $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ var ve $f(a)$'ya eşittir.

İşte üçüncü durumda, **fonksiyon *a* noktasında süreklidir** deriz. Hem limit var olacak hem de o noktadaki görüntü, o noktadaki limit değerine eşit olacak. Bunu biraz grafik yardımı ile anlatalım.

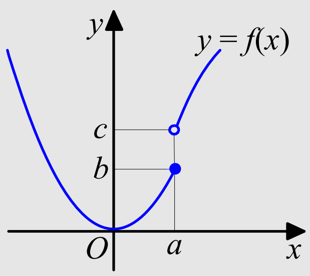


Örneğin, yukardaki grafikte

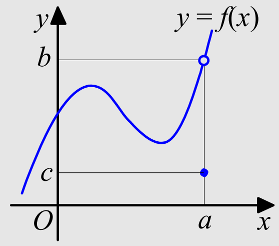
hem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ hem de $f(a) = b$

olduğundan *f* fonksiyonu *a* noktasında süreklidir.

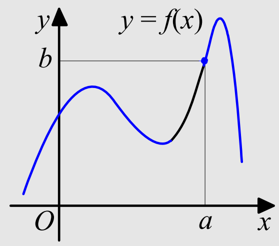
Sürekliliği kabaca şuradan anlayabilirsiniz. Fonksiyon grafiğini tam o noktada elinizi kaldırmadan çizebiliyorsanız, fonksiyon o noktada süreklidir. Şekillerden takip ederseniz daha rahat anlayabilirsiniz.



Bu grafik için; $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ yoktur, bundan dolayı süreklilikğin lafı bile edilemez, sürekli değildir. Süreksiz olduğu nokta sorulursa da cevaba ''*a*'' demeliyiz.



Bu grafik için, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$'dir, fakat $f(a)$ değeri *b* değil *c*'dir. Bundan dolayı *a* noktasında sürekli değildir. Grafiği çizerken (a, c) noktasını işaretlemek için elimizi kaldırmamız gerektiğini düşünün.



Bu grafik için, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$'dir, aynı zamanda da $f(a)$ değeri *b*'ye eşittir. Dolayısıyla fonksiyon *a* noktasında süreklidir. Görüldüğü üzere *a* apsisli noktadan elimizi kaldırmadan geçebiliyoruz.

Sürekliliği şu an araya girerek anlatmamızın nedeni birçok limit problemini birkaç saniyede çözmeye yardım etmesinden kaynaklanıyor. Görülüyor ki, her noktada sürekli olan fonksiyonlarda herhangi bir noktadaki limit değeri o noktadaki görüntüye eşit. Dolayısıyla biz uzun uzun soldan sağdan limit bakacağımıza fonksiyon o noktada sürekli mi değil mi ona bakalım, eğer sürekliyse direkt olarak o noktadaki görüntüsünü limit olarak cevaplayalım.

Peki fonksiyonun sürekli olup olmadığını nereden anlayacağız?

Süreksizlik daha çok tanımsızlık veya belirsizlik durumlarında çıkar. Tanımlı olduğu halde süreksizlikler de mevcuttur ama.

Örneğin *x*'e bağlı polinom fonksiyonlar hiç bir *x* reel sayısı için tanımsız veya belirsiz olamazlar,
$a > 0$ iken $y = a^x$ gibi üstel fonksiyonlar da öyle,
$x > 0$ olmak üzere $\log_2 x$ gibi logaritmik fonksiyonlar ve $x \neq a$ olmak üzere $\dfrac{1}{x-a}$ gibi eğriler, daha neler neler…

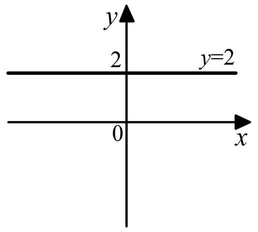
Grafiklerini göz önüne getirirsek çok daha rahat anlarız. Tabi, insan bilmediğini nasıl göz önüne getirsin diyeniniz olabilir, iş yine başa düştü. Temel bazı fonksiyonların grafiklerini ben sizin yerinize çizip öyle anlatayım.

Sabit fonksiyonlar,

yani $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y = f(x) = c$$

şeklindeki fonksiyonlar süreklidir.

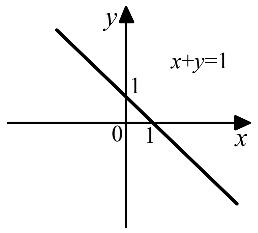


Yukarda sadece bir örnek olarak resmedilmiş $y = 2$ doğrusuna bakarsanız, grafiğin hiç el kaldırılmadan sonsuza kadar çizilebileceğini görürsünüz. $y = 3$ olsa da böyledir, $y = 2015$ olsa da…

O halde sabit fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır, yani c'ye.

- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}(4) = 4$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}(5) = 5$
- ✓ $\lim\limits_{x\to \pi}(5) = 5$
- ✓ $\lim\limits_{x\to \pi}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Doğrusal fonksiyonlar, yani kuralları birinci dereceden polinom olan fonksiyonlar da süreklidir.



Daha açık olarak,
a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$y = ax + b$$

şeklindeki fonksiyonlar süreklidir.

Grafikte sadece bir örnek olarak $y = -x + 1$ çizilmiş durumdadır. Hiçbir yerde tanımsız ya da belirsiz olmadığına dikkat ediniz. Çizerken el kaldırılmadığına da! $y = 2x$ olsa da böyle olacaktı, $y = x + 2015$ olsa da…

O halde birinci dereceden polinom fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

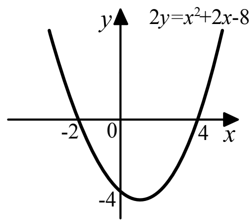
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}(x) = 3$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}(2x) = 2\cdot 3 = 6$
- ✓ $\lim\limits_{x\to \pi}(2x+3) = 2\pi + 3$
- ✓ $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\left(\sqrt{2}x+1\right) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1 = 3$

İkinci dereceden fonksiyonlar da süreklidir. Genel olarak

a, b ve c reel olmak üzere

$$y = ax^2 + bx + c$$

şeklindeki fonksiyonlar süreklidir.



Grafikleri adına parabol dediğimiz şekildedir. Sadece bir örnek olarak $2y = x^2 + 2x - 8$ parabolünü çizdik. Hiçbir yerde duraksama olmadığına dikkat edin.

O halde ikinci dereceden polinom fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

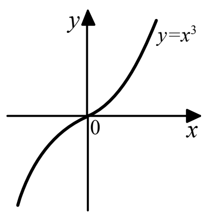
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}(x^2) = 3^2 = 9$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x) = 3^2+3 = 12$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x+5) = 3^2+3+5 = 17$
- ✓ $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}(2x^2+x-1) = 2\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}-1 = 3+\sqrt{2}$

Kübik fonksiyonlar da süreklidir. Daha açık olarak;

a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

şeklindeki eğriler, yani kübik fonksiyonlar da süreklidir.



Yanda örnek olarak $y = x^3$ grafiğini çizdik. Herhangi bir noktada limit mi soruluyor, koy x yerine bitsin!

O halde ikinci dereceden polinom fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

✓ $\lim_{x\to1}\left(x^3\right)=1^3=1$

✓ $\lim_{x\to1}\left(x^3+2x^2\right)=1^3+2\cdot1^2=3$

✓ $\lim_{x\to1}\left(x^3+2x^2-3x\right)=1^3+2\cdot1^2-3\cdot1=0$

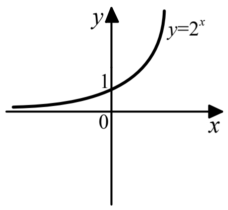
✓ $\lim_{x\to2}\left(x^3+2x^2+4\right)=2^3+2\cdot2^2+4=20$

Uzatmadan şunu belirtelim. *Kuralı bir polinom olan tüm fonksiyonlar süreklidir*. Derecesi fark etmez! Hatırlarsanız polinomlar hiçbir x reel değeri için tanımsız veya belirsiz olamazlardı.

a pozitif olmak üzere

$$y=f(x)=a^x$$

şeklindeki üstel fonksiyonlar da süreklidir.



Yanda örnek olarak $y=2^x$ grafiğini çizdik. Dur durak bilmediğinden belli!

O halde yukardaki gibi üstel fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

✓ $\lim_{x\to1}\left(3^x\right)=3^1=3$

✓ $\lim_{x\to2}\left(4^x\right)=4^2=16$

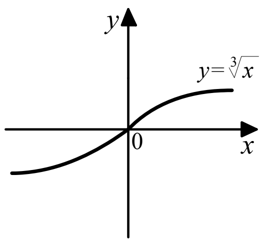
✓ $\lim_{x\to1}\left(3^{x+2}\right)=3^{1+2}=27$

✓ $\lim_{x\to5}\left((\sqrt{2})^{x+1}\right)=(\sqrt{2})^{5+1}=8$

$n\in\mathbb{N}^+$ ve $g(x)$ bir sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$y=f(x)=\sqrt[2n-1]{g(x)}$$

fonksiyonları da süreklidir.



Kök derecesinin pozitif tek sayı olduğuna dikkat edin ama. Biz örnek olarak $y=\sqrt[3]{x}$ grafiğini çizdik.

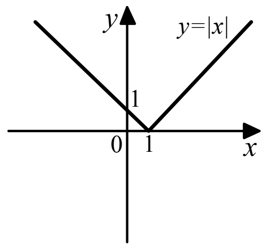
O halde yukardaki gibi tek dereceden köklü fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

✓ $\lim_{x\to8}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{8}=2$

✓ $\lim_{x\to3}\sqrt[3]{x^2+x+15}=\sqrt[3]{3^2+3+15}=3$

✓ $\lim_{x\to1}\sqrt[3]{2^{x+5}}=\sqrt[3]{2^{1+5}}=4$

Mutlak değer fonksiyonu da süreklidir.



Genel olarak;
$g(x)$ sürekliyse

$$y=f(x)=|g(x)|$$

fonksiyonları süreklidir.

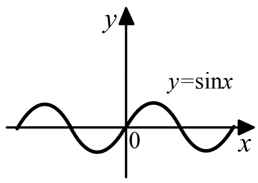
Tabi ki süreksiz bir fonksiyonun mutlak değeri süreklidir diye bir şey demiyoruz. Evvela $g(x)$ sürekli olacak. Resmedilen $y=|x-1|$ grafiğine bakarsanız hiçbir yerde el kaldırmadan çizmenin mümkün olduğunu fark edin.

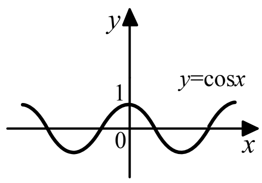
O halde yukardaki gibi mutlak değer fonksiyonlarının herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

✓ $\lim_{x\to8}|2x+1|=|2\cdot8+1|=17$

✓ $\lim_{x\to64}\left|x-\sqrt[3]{x}\right|=\left|64-\sqrt[3]{64}\right|=60$

✓ $\lim_{x\to1}\left|4^{2x+1}\right|=\left|4^{2\cdot1+1}\right|=64$





$g(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$y=f(x)=\sin(g(x)) \text{ ve } y=f(x)=\cos(g(x))$$

fonksiyonları süreklidir.

Sadece birer örnek olarak $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ grafiklerini çizdik.

O halde yukardaki gibi sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

✓ $\lim_{x\to\pi}\left(\sin x\right)=\sin\pi=0$

✓ $\lim_{x\to\pi}\left(\cos 2x\right)=\cos 2\pi=1$

✓ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin(\cos x)\right)=\sin(\cos\frac{\pi}{2})=0$

✓ $\lim_{x\to3}\left(\cos(3^x+3)\right)=\cos(3^3+3)=\cos 30$

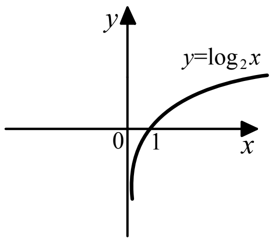
Tanım aralığında süreklilik

Bazı fonksiyonlar her yerde değil ama tanımlandıkları bölgelerde süreklilerdir.

a, 1'den farklı bir pozitif sayı ve $g(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$y = f(x) = \log_a g(x)$$

fonksiyonu $g(x)$'in pozitif olduğu yerlerde süreklidir.



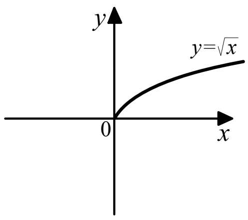
$g(x)$'in negatif olduğu zamanlar, zaten f diye bir fonksiyondan bahsedemeyiz bile.
Örnek olarak, $y = \log_2 x$ fonksiyonunu düşünürsek, fonksiyonun tanımlı olması için x'in pozitif reel sayı olması lazım. x bu şartlara uyduğu sürece bu logaritma fonksiyonu süreklidir.

O halde yukardaki gibi logaritmik fonksiyonların tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\log_3(x+1)\right) = \log_3(2+1) = 1$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\log_2(4^x)\right) = \log_2(4^3) = 6$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 8}\left(\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{x})\right) = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{8}) = -1$

Karekök fonksiyonu dediğimiz $y = \sqrt{x}$ fonksiyonu da süreklidir. Genel olarak, *$g(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere*

$$y = f(x) = \sqrt{g(x)}$$



fonksiyonu $g(x)$'in tanımlı ve pozitif olduğu aralıklarda süreklidir. Biz örnek olarak $y = \sqrt{x}$ eğrisini çizdik. $x > 0$ olduğu sürece sorun yok.

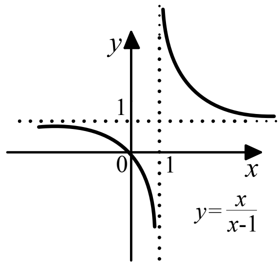
O halde yukardaki gibi kareköklü fonksiyonların tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3x+10}\right) = \sqrt{3\cdot 2+10} = 4$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{3^x}\right) = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{\log_2 x}\right) = \sqrt{\log_2 8} = \sqrt{3}$

a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere

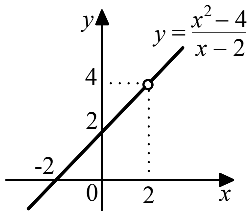
$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

şeklindeki rasyonel fonksiyonlar, $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ kümesinde yani $f(x)$'in tanımlı olduğu kümede süreklidir.



Biz örnek olarak $y = \dfrac{x}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çizdik. Eğer 1'de limit sorulsaydı sol limit ile sağ limit birbirlerine eşit olmadıklarından (hatta eşit olsalardı bile reel sayı olmadıklarından) limit yok diyecektik.

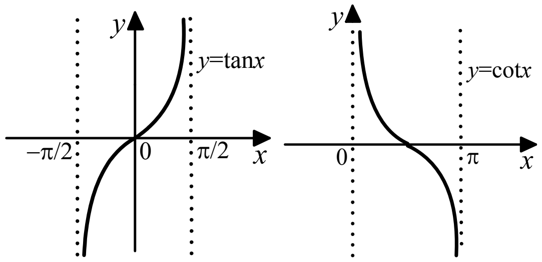
$y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ bağıntısını düşünelim.



Eğer bu bağıntı $\mathbb{R} - \{2\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlanırsa fonksiyon olacağından, bu fonksiyona da tanım kümesinde süreklidir diyebiliriz. Evet, haklısınız, $x = 2$'de süreksizdir ama 2 tanım kümesinde yoktur ki! Ayrıca bu fonksiyonun 2 noktasında limitinin de var olduğuna dikkat ediniz. O noktada belirsiz olduğu halde limitinin var olabileceğine güzel bir örnektir.

O halde yukardaki gibi rasyonel fonksiyonların tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{3^x} = \dfrac{4\cdot 1-1}{3^1} = 1$
- ✓ $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{2+\sin x}{\cos x} = \dfrac{2+\sin\pi}{\cos\pi} = -2$
- ✓ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{4}-1} = 4$



$y = f(x) = \tan x$ fonksiyonu, $\pi/2$'nin tek katlarında tanımsızdır. Diğer tüm yerlerde tanımlıdır. Tanımlı olduğu her yerde de süreklidir.

$y = f(x) = \cot x$ fonksiyonu da π'nin katlarında tanımsızdır, diğer her yerde tanımlı ve üstüne üstlük süreklidir.

O halde yukardaki gibi tanjant fonksiyonlarının tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\tan x\right) = \tan\pi = 0$
- ✓ $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\tan(2x+\frac{\pi}{3})\right) = \tan(2\pi+\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
- ✓ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cot 3x\right) = \cot 3\pi = 0$

Şu ana kadar anlattıklarımızın özetini şu cümleyle yapabiliriz:

'$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *kaçtır?*' sorusunda a değeri $f(x)$ için kritik bir nokta değilse (fonksiyonu tanımsız veya belirsiz yapmıyorsa), direkt olarak

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{'dır}$$

diyoruz, bitiyor!

'Ya kritik noktaysa?'ya geleceğiz, biraz sabır!

Örnek. $f: \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x) = 3^x$$

fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun 0 *ve* 4 *noktalarındaki limitlerinin toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 4 D) 81 E) 82

Çözüm: Kabaca, 3^x'i tanımsız veya belirsiz yapmak mümkün değil diye 3^x fonksiyonu her yerde süreklidir. O halde

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 3^x = 3^0 = 1,$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 0} 3^x = 3^4 = 81$$

olduğundan 1 + 81 = 82 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\lim_{x\to 5} 2^{x^2-x+1}$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2^{21} E) Yoktur

Çözüm: $y = 2^{x^2-x+1}$ fonksiyonu her x reel sayısı için sürekli olduğundan $x = 5$ değerini direkt olarak yerine yazalım.

$$\lim_{x\to 5} 2^{x^2-x+1} = 2^{\lim\limits_{x\to 5}(x^2-x+1)} = 2^{5^2-5+1} = 2^{21}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\lim_{x\to 1}\left|x^3 - x\right|$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $|x^3 - x|$ fonksiyonu her x reel sayısı için süreklidir. Dikkat ederseniz tanımsız belirsiz yapmak da mümkün değil. O halde hemen x yerine 1 yazalım.

$$\lim_{x\to 1}\left|x^3 - x\right| = \left|1^3 - 1\right| = 0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-5}}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) −4 B) −1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: Fonksiyon sadece 5 noktasında süreksizdir. Fakat $x = 5$'te değil de $x = 1$'de limit sorulduğundan hemen x yerine 1 yazalım.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-5}} = \sqrt[3]{\frac{1+3}{1-5}} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\lim_{x\to 3}\left(\log_4(x+1)\right)$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $x > -1$ olduğu sürece $\log_4(x + 1)$ fonksiyonu sürekli olduğundan hemen x yerine 3 yazalım.

$$\lim_{x\to 3}\left(\log_4(x+1)\right) = \log_4(3+1) = \log_4 4 = 1$$

Doğru cevap: D.

Limit Hesaplarında Dört İşlem

İki farklı fonksiyonumuz var olsun. Birinin a'daki limiti ℓ_1, diğerinin de ℓ_2 olsun. O halde bu fonksiyonların

- ✓ toplamının a'daki limiti $\ell_1+\ell_2$,
- ✓ farklarının a'daki limiti $\ell_1-\ell_2$,
- ✓ çarpımının a'daki limiti $\ell_1\cdot\ell_2$,
- ✓ bölümünün a'daki limiti de $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ olur. $(\ell_2\neq 0)$

Örnek. *İkisi de ℝ'de tanımlı*

$$f(x) = 2x^3 \text{ ve } g(x) = x^2 - 1$$

fonksiyonları verilsin.

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right],$$
$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)-g(x)\right],$$
$$\lim_{x\to -1}\left[f(x)\cdot g(x)\right],$$
$$\lim_{x\to -2}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

değerlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen fonksiyonların her reel sayı için sürekli olduklarını biliyoruz. O halde limit istenen noktaları direkt olarak yerine yazabiliriz. İsteyen

$$f(x) + g(x),$$
$$f(x) - g(x),$$
$$f(x)\cdot g(x) \text{ ve } \frac{f(x)}{g(x)}$$

değerlerini hesaplayıp, orada noktaları yerlerine yazabilir.

✓ $$\lim_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) = 2\cdot 1^3 + 1^2 - 1 = 2,$$

✓ $$\lim_{x\to 2}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} g(x) = 2\cdot 2^3 - (2^2-1) = 16 - 3 = 13,$$

✓ $$\lim_{x\to -1}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to -1} f(x)\cdot\lim_{x\to -1} g(x) = 2\cdot(-1)^3\cdot[(-1)^2-1] = -2\cdot[0] = 0,$$

✓ $$\lim_{x\to -2}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to -2} f(x)}{\lim_{x\to -2} g(x)} = \frac{2\cdot(-2)^3}{(-2)^2-1} = \frac{-16}{3}.$$

Örnek.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2-3}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: 3 değeri bu fonksiyon için kritik bir nokta olmadığından sadece x yerine 3 yazmak yeter.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2-3} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^3-3x^2)}{\lim_{x\to 3}(x^2-3)} = \frac{3^3-3\cdot 3^2}{3^2-3} = \frac{0}{6} = 0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f: \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}-\{2\}$,

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

fonksiyonunun 1 *noktasındaki limiti kaçtır?*

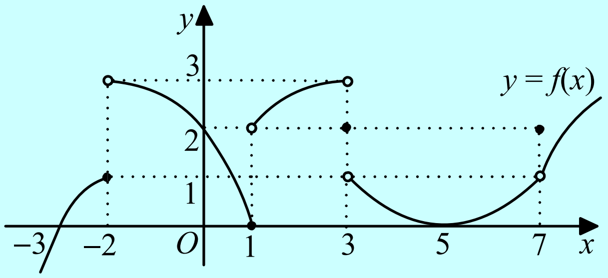
A) –5 B) –4 C) –3 D) 2 E) 1

Çözüm: Fonksiyonun tek kritik noktası var, o da 2. Ama soruda 2 noktasında limit sorulmuyor. 1 noktasındaki limit soruluyor. 1 kritik değil diye hemen x yerine 1 yazacağız.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-2} = \frac{1+3}{1-2} = -4.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

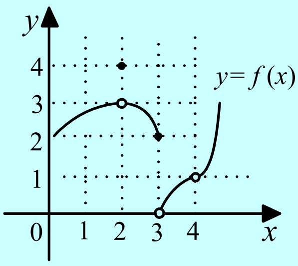


Yukarıda grafiği verilmiş fonksiyonun nerelerde sürekli nerelerde süreksiz olduğunu belirterek, −3, −2, 0, 1, 3, 5, 7 noktalarındaki limitlerini varsa bulalım.

Çözüm: −2, 1, 3, 7 apsisli noktalarda el kaldırmadan çizmek mümkün olmadığından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir, diğer her yerde süreklidir. Sürekli olduğu noktalarda limit değeri de görüntüye eşittir. Bu kısıtlamalar altında sorulan soruları cevaplayalım.

- ✓ $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=0$,
- ✓ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$,
- ✓ $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=0$,
- ✓ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=1$ ama $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=3$ olduğundan $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ yoktur,
- ✓ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ ama $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ yoktur,
- ✓ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=3$ ama $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=1$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ yoktur,
- ✓ $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=1$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 7} f(x)=1$'dir.

Örnek.
f, grafiği yanda verilen bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun x'in 2, 3, 4 değerinden bazıları için var olan limitleri toplamı kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$ ama $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0$ yani $x=3$ noktasında soldan limit değeriyle sağdan limit değeri eşit olmadığından $x = 3$'te limit yoktur. Diğer yandan

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$ diye $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ ve

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=1$ diye $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=1$'dir.

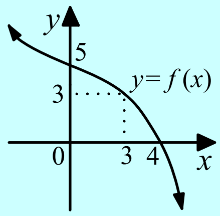
O halde var olan limitler toplamı 3 + 1 = 4'tür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yanda $y=f(x)$ eğrisinin grafiği verilmiştir. Buna göre*

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(f(x+1))}{f(x)-f^{-1}(x+2)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 5

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(f(x+1))}{x-f^{-1}(x+2)}=\dfrac{f(f(4))}{f(3)-f^{-1}(5)}$

Fonksiyon grafiği (4, 0) noktasından geçtiği için $f(4) = 0$ dır. Şimdi bize $f(0)$ lazım. Grafik (0, 5) noktasından geçtiğinden $f(0) = 5$'tir. Diğer yandan $f^{-1}(5) = 0$ çıkar. Aynı zamanda $f(3) = 3$ olduğundan cevap

$$\frac{f(f(4))}{f(3)-f^{-1}(5)}=\frac{f(0)}{3-0}=\frac{5}{3}.$$

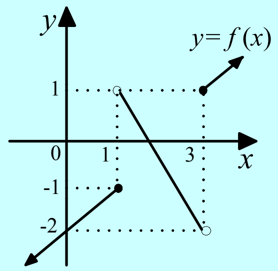
Doğru cevap: D.

Örnek. *Yanda $y=f(x)$ parçalı fonksiyonunun grafiği verilmiştir.*

Buna göre

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x+2)}{f(2-x)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?



A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

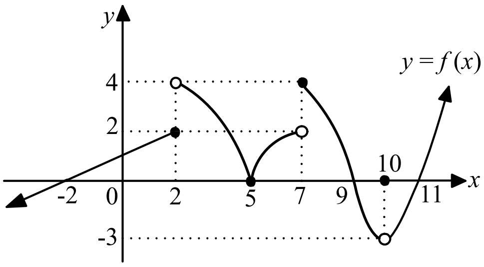
Çözüm: $x\to 1^-$ ise $x+2\to 3^-$ ve $2-x\to 1^+$ olur.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x+2)}{f(2-x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}=\frac{-2}{1}=-2.$$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST

Aşağıdaki ilk 10 soruyu bu grafiği dikkate alarak çözünüz.



1.
Yukarda grafiği verilmiş olan *f* fonksiyonu (–∞, 2] aralığında doğrusal, diğer aralıklarda da grafikte gösterildiği gibi **davrandığına göre, *f* fonksiyonu için aşağıdaki bilgilerden hangisi söylenemez?**

A) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$ B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ C) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$
D) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = 0$ E) $\lim\limits_{x\to 10} f(x) = 0$

2.
Yukarda grafiği verilmiş olan *f* fonksiyonunun süreksiz olduğu nokta sayısı en az kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
Yukarda grafiği verilmiş olan *f* fonksiyonu için
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)$$
ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

4.
Yukarda grafiği verilmiş olan *f* fonksiyonu için
$$\lim_{x\to 7^+} f(x)$$
ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

5.
Yukarda grafiği verilmiş olan *f* fonksiyonu için
$$\lim_{x\to 10} f(x) + \lim_{x\to 11} f(x)$$
ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

A) –3 B) 0 C) 2 D) 3 E) Yoktur

6.
Yukarda grafiği verilmiş olan *f* fonksiyonunun limitinin 0 olduğu farklı nokta sayısı en az kaç-tır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
Yukarda grafiği verilmiş *f* fonksiyonunun hangi noktada ''süreksiz olduğu halde'' limiti vardır?

A) –2 B) 2 C) 5 D) 7 E) 10

8.
Yukarda grafiği verilmiş *f* fonksiyonunun 2, 7 ve 10 noktalarındaki sağdan limitlerinin toplamı kaçtır?

A) −2 B) 2 C) 5 D) 7 E) 10

9.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu hiçbir aralıkta **sabit olmadığına göre**

$$\lim_{x\to 4} f(x) + \lim_{x\to 6} f(x)$$

toplamı kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.
Yukarda grafiği verilmiş olan *f* fonksiyonunun limitinin var olmadığı farklı nokta sayısı en az kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

11.
$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x + 3$$

kuralıyla belirli bir *f* fonksiyonunun −1 apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 5 E) Yoktur

12.
$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 4$$

kuralıyla belirli bir *f* fonksiyonunun 2 apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) −4 B) 0 C) 2 D) 4 E) Yoktur

13.
$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x) = 3$$

kuralıyla belirli bir *f* fonksiyonunun 1, 2 ve 3 apsisli noktalarındaki limitlerinin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 27

14.
$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x) = 3^x$$

kuralıyla belirli bir *f* fonksiyonunun hangi noktasındaki limiti 3'tür?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 9

15.
$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

kuralıyla belirli bir *f* fonksiyonunun −1 ve *a* apsisli noktalarındaki limitlerinin toplamı 1 olduğuna göre *a* kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 8

16.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = |\sqrt{x} - x^2|$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun 4 apsisli noktasındaki limiti a olsun.

Bu fonksiyonun $a - 13$ apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 14 E) Yoktur

17.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun $\frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

18.

$f: (2, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log_3(x-2)$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun hangi noktasındaki limiti 2'dir?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 9 E) 11

19.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{12}{x^2 + 2}$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun −2 apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) Yoktur B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

20.

$f: \mathbb{R}^+ - \{1\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun hangi noktasındaki limiti 4/13 tür?

A) −3/4 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21.

$$\lim_{x \to 1}\left[(x^2 + ax + 1) \cdot (x^4 + 1)\right] = -4$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) –5 B) –4 C) 0 D) 2 E) 7

22.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x - 5}{x - 2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) $-\frac{3}{2}$ C) 0 D) ∞ E) $-\infty$

23.

$$\lim_{x \to 3^-}\left(\frac{|x-3|}{x-3} + 5x^2 - 7\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 45 B) 39 C) 38 D) 37 E) 7

24.

$$f(x)=\begin{cases} mx-5, & x<1 \text{ ise} \\ x^2-mx-2n, & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **var olduğuna göre $m + n$ ifadesinin değeri kaçtır?**

A) -2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 6

25.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a+1, & x\leq 3\ ise \\ \sqrt{x^2+3b+1}, & x>3\ ise\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=4$$

olduğuna göre $a + b$ toplamının değeri kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

26.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<-2 \text{ ise} \\ x^2+1, & -2\leq x<3 \text{ ise} \\ 3x+2, & x\geq 3 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 8 E) 6

27.

Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$ B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2009}{x}=+\infty$ C) $\lim\limits_{x\to\infty}4^{-x}=0$

D) $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$ E) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{-x}=-\infty$

28.

$$f(x)=\begin{cases} kx+m, & x\geq 4 \text{ ise} \\ 2kx-3m, & x<4 \text{ ise}\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=15$ olduğuna göre k kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

29.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2009}{x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\infty$ B) ∞ C) 0 D) 1 E) Yoktur

30.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}+(a-3)x+b-1\right)=5$$

olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 15 B) 10 C) 9 D) 6 E) −24

CEVAP ANAHTARI

1	E	**2**	C	**3**	C	**4**	D	**5**	A	**6**	D
7	E	**8**	C	**9**	C	**10**	A	**11**	C	**12**	B
13	C	**14**	B	**15**	E	**16**	A	**17**	D	**18**	E
19	E	**20**	C	**21**	B	**22**	E	**23**	D	**24**	C
25	B	**26**	D	**27**	E	**28**	C	**29**	E	**30**	A