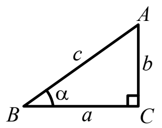
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Temel Trigonometrik Teoremler

Trigonometri Başlıyooor! Her şey Pisagor'un o meşhur teoremini bulmasıyla başlamış olsa gerek. Hatırlayalım:

Hipotenüs uzunluğu c br, dik kenar uzunlukları a br ve b br olan dik bir ABC üçgeninde $a^2 + b^2 = c^2$'dir.



Türkçe'ye çevirelim:
Bir dik üçgende, dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.

Bu teoremin daha nicelerine gebe olduğu, en azından olabilme olasılığının yüksek olduğu daha o günlerde anlaşılmış olmalı ki formülü evirip çevirip yeni şeyler bulmaya çalışmışlar. Akla ilk gelen, karelerin birini diğer tarafa atarak iki kare farkından yararlanmak olabilir örneğin. Başka ne yapılabilir diye düşününce, akla, toplamı bir sabit sayıya çevirmek amacıyla, eşitliğin her iki yanını c^2'ye bölmek geliyor:

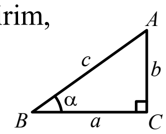
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Eşitliğin güzelliği ortada! Her ama her üçgende *dik kenar uzunluklarının hipotenüs uzunluğuna oranlarının kareleri toplamı hep ama hep 1'e eşit olur* diyor. Her matematikçinin içindeki dürtü gereği, içimizden, bu oranlara birer isim vererek teoremi sadeleştirmek geliyor. Dik açının gördüğü kenara, *dik açının gördüğü kenar* demektense, *hipotenüs* deyiverdiğimiz gibi. Böyle yapmak derdimizi anlatmakta kolaylık sağlayacağı gibi, yazı yazarken de kolaylık sağlar. Beni de düşünün biraz! ☺ Hal böyleyse, yani isim vermek işi kolaylaştırıyorsa, var olan diğer oranlara da birer isim verelim, olsun bitsin! 3 farklı uzunluk varken kaç farklı oran tanımlanabilir? a/b ile b/a eşit olmadığından, sıranın önemli olduğunu fark ediyoruz. O halde, kombinasyon değil, permütasyon yapacağız: $P(3, 2) = 6$. Bu altı oranı isterseniz yazalım:

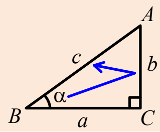
$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}.$$

Sıra bunlara sırasıyla isimler vermeye geldi. Altı tanımı ardı ardına vermek belki pedagojik açıdan yanlıştır ama bu seferlik böyle olsun!

Dik kenar uzunlukları a birim ve b birim, hipotenüs uzunluğu c birim olan yandaki gibi bir ABC dik üçgeni çizilsin. $m(CBA) = \alpha$ olsun.

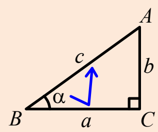


Sinüs. α ölçülü açının gördüğü dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün sinüsü** denir. sin α ile gösterilir.



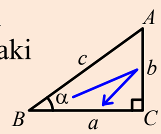
$$\sin(CBA) = \sin\alpha = \frac{b}{c}$$

Kosinüs. α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kosinüsü** denir. cos α ile gösterilir.



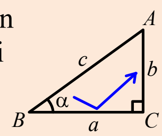
$$\cos(CBA) = \cos\alpha = \frac{a}{c}$$

Tanjant. α ölçülü açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun komşusundaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün tanjantı** denir. tan α ile gösterilir.



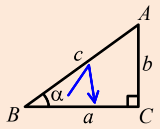
$$\tan(CBA) = \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Kotanjant. α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun karşısındaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kotanjantı** denir. cot α ile gösterilir.



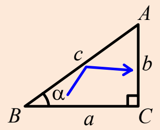
$$\cot(CBA) = \cot\alpha = \frac{a}{b}$$

Sekant. Hipotenüs uzunluğunun, α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün sekantı** denir. sec α ile gösterilir.



$$\sec(CBA) = \sec\alpha = \frac{c}{a}$$

Kosekant. Hipotenüs uzunluğunun, α ölçülü açının gördüğü dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kosekantı** denir. csc α ile gösterilir.

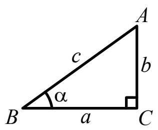


$$\csc(CBA) = \csc\alpha = \frac{c}{b}$$

Şimdi bu tanımlardan doğan en temel teoremleri verelim. Onlarca teorem üretilebilir. İlk teoremi yazının başında vermiştik zaten. Hatırlayalım:

Teorem. *Her* α *reel sayısı için* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Kanıt: Aynı üçgen için işlem yaptığımızı farz edelim.



$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ ve $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ diye,

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Hemen bu teoremin kullanılması gereken örneklerimizi verelim.

Örnek.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$$

iken $\sin x \cdot \cos x$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{8}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: Hemen eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{4}$$

$$2\cdot\sin x\cdot\cos x = -\frac{3}{4}$$

$$\sin x\cdot\cos x = -\frac{3}{8}.$$

Doğru cevap: B.

Uyarı. Burada tanımlandıkları halleriyle trigonometrik oranlar mutlaka pozitif olurlar. Ama az önce çözdüğümüz örnekte iki trigonometrik oranın çarpımı negatif çıktı! Biz hata yapmadık, asıl tanımları bunlar değil de ondan öyle oldu…

Bu tanımlar sadece dar açı ölçüleri için geçerlidir. Vakti gelince sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının adam gibi tanımlarını vereceğiz.

Örnek.

$$\frac{3+\sin^2 x}{2-\cos x} - 2$$

ifadesinin en sade eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\sec x$

Çözüm: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğini kullanacağız. Zaten şu an için başka ne biliyoruz ki? Payda eşitlemeyin de yeter. $\sin^2 x$ yerine $1 - \cos^2 x$ yazın, çıkmazsa gelin! ☺

$$\frac{3+\sin^2 x}{2-\cos x} - 2 = \frac{3+1-\cos^2 x}{2-\cos x} - 2$$

$$= \frac{(2-\cos x)(2+\cos x)}{2-\cos x} - 2$$

$$= (2+\cos x) - 2$$

$$= \cos x$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\frac{2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2}{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

Çözüm: Seyretmekle bir şey olacağı yok! Bari $\sin^2 x$ yerine $1 - \cos^2 x$ yazalım. Gerisi kendiliğinden gelir, yani inşallah!

$$\frac{2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2}{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1} = \frac{2(1-\cos^2 x) + 5\cos^2 x - 2}{3\cos^2 x - (1-\cos^2 x) + 1}$$

$$= \frac{3\cos^2 x}{4\cos^2 x} = \frac{3}{4}$$

Doğru cevap B.

Örnek.

$$\frac{1+\sin x-\cos^2 x}{1+\sin x}$$

ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\csc x$

Çözüm: Verilen ifadede $\cos^2 x$ yerine $1-\sin^2 x$ yazalım.

$$\frac{1+\sin x-\cos^2 x}{1+\sin x}=\frac{1+\sin x-1+\sin^2 x}{1+\sin x}$$
$$=\frac{\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}$$
$$=\frac{\sin x\cdot(1+\sin x)}{1+\sin x}=\sin x$$

olduğunu gördük.

Doğru cevap: A.

Örnek. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ *ve* $\sin x+\sin^2 x=1$ *ise*

$$\cos^4 x+\cos^2 x$$

kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Verilen eşitlikten $\sin x$'i bulalım:

$$\sin x+\sin^2 x=1$$
$$\sin x=1-\sin^2 x$$
$$\sin x=\cos^2 x$$

olduğundan sorulan ifadede $\cos^2 x$ gördüğümüz yere $\sin x$ yazalım:

$$\cos^4 x+\cos^2 x=(\cos^2 x)^2+\cos^2 x$$
$$=\sin^2 x+\sin x$$
$$=1$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ$$

toplamı kaça eşittir?

A) 44 B) $\frac{89}{2}$ C) 45 D) $\frac{91}{2}$ E) 46

Çözüm: Sorulan toplam T olsun. $\sin^2 90^\circ=1$ olduğundan

$$T-1=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 89^\circ$$

yazabiliriz.

$$T-1=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 89^\circ$$
$$=1-\cos^2 1^\circ+1-\cos^2 2^\circ+\ldots+1-\cos^2 89^\circ$$
$$=89-(\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\ldots+\cos^2 89^\circ)$$
$$=89-(\sin^2 89^\circ+\cos^2 88^\circ+\ldots+\sin^2 1^\circ)$$
$$=89-(T-1)$$

olup

$$T-1=89-T+1$$

eşitliğinden $T=\frac{91}{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\tan y = 0,66$ *olduğuna göre*

$$T=\cos^2 y\cdot\sin y-\sin y+\sin^3 y$$

olduğuna göre T ifadesinin değeri kaçtır?

A) −0,66 B) −0,34 C) 0 D) 0,34 E) 0,66

Çözüm: Verilen eşitliği $\sin y$ ortak parantezine alalım:

$$T=\cos^2 y\cdot\sin y-\sin y+\sin^3 y$$
$$=\sin y\cdot[\cos^2 y-1+\sin^2 y]$$

$\cos^2 y+\sin^2 y=1$ olduğundan

$$T=\sin y\cdot[1-1]=0$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$\sin^6 x+\cos^6 x-\cos^4 x+\sin^2 x-2\sin^4 x$$

ifadesinin sayısal değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $\sin x = s$ ve $\cos x = c$ olsun.

$$s^6+c^6-c^4+s^2-2s^4$$
$$=\left(s^2+c^2\right)\left(s^4-s^2c^2+c^4\right)-c^4+s^2-2s^4$$
$$=s^4-s^2c^2+c^4-c^4+s^2-2s^4$$
$$=-s^2c^2+s^2-s^4$$
$$=s^2\left[-c^2+1-s^2\right]$$
$$=s^2\cdot\left[1-1\right]=0$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $c = \cos\theta$ *ve* $s = \sin\theta$ *olduğuna göre,*

$$c^6 + 3c^2s^2 + s^6$$

ifadesinin kısaltılmışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin 2\theta$ B) 1 C) $\sin\theta\cdot\cos\theta$ D) 3 E) $\cos 2\theta$

Çözüm: Öncelikle $c^6 + s^6$ toplamını iki küp toplamı olarak yazacağız.

$$\begin{aligned} c^6 + s^6 &= (c^2)^3 + (s^2)^3 \\ &= (c^2+s^2)(c^4 - c^2s^2 + s^4) \\ &= c^4 + s^4 - c^2s^2 \\ &= (c^2+s^2)^2 - 2c^2s^2 - c^2s^2 \\ &= 1 - 3c^2s^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$c^6 + 3c^2s^2 + s^6 = (1 - 3c^2s^2) + 3c^2s^2 = 1$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ *ise*

$$\sin^6 x + \cos^6 x$$

toplamı a cinsinden kaça eşittir?

A) $\frac{3a-2}{2}$ B) $\frac{3a-1}{2}$ C) $\frac{3a-3}{2}$ D) $\frac{2a-1}{3}$ E) $\frac{2a-1}{2}$

Çözüm: Önce verileni, sonra da bulduğumuzu kullanmak üzere, sorulan ifadeyi düzenleyelim:

$$\begin{aligned} a &= \sin^4 x + \cos^4 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x \end{aligned}$$

olduğundan

$$\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1-a}{2}$$

bulunur. Şimdi bize sorulan $\sin^6 x + \cos^6 x$ toplamını iki küp toplamı şeklinde düşünüp açalım:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

yani

$$1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

bulunur. Bulduğumuzu yerine yazarsak da

$$1 - 3\left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{3a-1}{2}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$A = \frac{(\sec x - \csc x)(1 + \tan x + \cot x)}{\tan x\sec x - \cot x\csc x}$$

olduğuna göre A reel sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Aşağıdan takip ediniz.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sec x - \csc x)(1 + \tan x + \cot x)}{\tan x\sec x - \cot x\csc x} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)}{\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}} \\ &= \frac{\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x\cos x}\right)\cdot\left(\frac{\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}\right)}{\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x} - \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x)}{\sin^3 x - \cos^3 x} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x)}{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x)} = 1. \end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\frac{1 - \sin x\cos x}{\sec x - \csc x}\cdot\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\sin x\cdot\cos x$ E) $\sec x\cdot\csc x$

Çözüm: Sadeleştireceğimiz ifadeye A diyelim. İkinci kesirde pay ve paydayı çarpanlarına ayırırsak $\sin x + \cos x$ sadeleşir.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \sin x\cdot\cos x}{\sec x - \csc x}\cdot\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} \\ &= \frac{1 - \sin x\cdot\cos x}{\sec x - \csc x}\cdot\frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x - \sin x\cdot\cos x + \cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x - \cos x}{\sec x - \csc x} \\ &= \frac{\sin x - \cos x}{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}} \\ &= \sin x\cdot\cos x \end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\frac{a}{\sin x+3}+\frac{b}{\sin x-2}=\frac{3\sin x+4}{-\cos^2 x+\sin x-5}$$

eşitliğine göre a·b çarpımı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $-\cos^2 x+\sin x-5$ ifadesinde $\cos^2 x$ yerine hemen $1-\sin^2 x$ yazalım.

$$-\cos^2 x+\sin x-5=\sin^2 x+\sin x-6$$
$$=(\sin x+3)\cdot(\sin x-2)$$

olduğundan verilen ifadede sağ tarafın paydasının sol taraftaki paydaların çarpımı olduğunu anlıyoruz. O halde payda eşitlersek

$$a(\sin x-2)+b(\sin x+3)=3\sin x+4$$

olduğunu buluruz. Düzenleyelim.

$$(a+b)\sin x+(-2a+3b)=3\sin x+4$$

olduğundan $a+b=3$ ve $-2a+3b=4$ eşitliklerine ulaşırız. Bu iki denklemi çözersek $a=1$ ve $b=2$ bulunur ki $a \cdot b=2$ çıkar.

Doğru cevap: B.

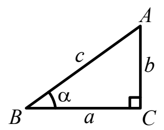
Her ne kadar altı farklı trigonometrik oran olsa da sinüs ve kosinüs tüm trigonometrinin altından kalkmaya yeter. Çünkü tanjant, kotant, sekant ve kosekant, sinüslü veya kosinüslü yazılabilirler. Şimdi o yazılımları öğreneceğiz.

Teorem. *Her* α *reel sayısı için*

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Kanıt: Yine aynı üçgendeyiz.

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$



Örnek.

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{4}{3}$$

olduğuna göre $\tan x$ *kaçtır?*

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: İçler dışlar çarpımı yapalım:

$$3\cdot\sin x+3\cdot\cos x=4\cdot\sin x-4\cdot\cos x$$
$$7\cdot\cos x=\sin x$$

olur. Eşitliğin her iki yanını $\cos x$'e bölersek, sorulan $\tan x$ değerinin 7 olduğunu görürüz.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$a\cdot\sin x-b\cdot\cos x=0$$
$$a\cdot\sin^3 x+b\cdot\cos^3 x=\sin x\cdot\cos x$$

eşitliklerini sağlayan a ve b sayılarının karelerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İlk eşitlikten b'yi bulup ikinci eşitlikte yerine yazacağız.

$$a\cdot\sin x-b\cdot\cos x=0$$
$$b\cdot\cos x=a\cdot\sin x$$
$$b=a\cdot\tan x$$

Şimdi ikinci denklemde b'yi yerine yazalım:

$$a\cdot\sin^3 x+b\cdot\cos^3 x=\sin x\cdot\cos x$$
$$a\cdot\sin^3 x+a\cdot\tan x\cdot\cos^3 x=\sin x\cdot\cos x$$
$$a\cdot\sin x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin x\cdot\cos x$$
$$a=\cos x$$

Şu durumda

$$b=a\cdot\tan x=\cos x\cdot\tan x=\sin x$$

olacağından

$$a^2+b^2=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

olarak bulunur.

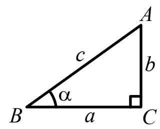
Doğru cevap: A.

Teorem. *Her* α *reel sayısı için*

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Kanıt: Hâla aynı üçgendeyiz.

$$\cot\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$



Örnek.

$$\frac{3\sin x-5\cos x}{2\sin x-4\cos x}=\frac{1}{2}$$

olduğuna göre $\cot x$ *kaçtır?*

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

Çözüm: İçler dışlar çarpımı yapalım:

$$6\cdot\sin x-10\cdot\cos x=2\cdot\sin x-4\cdot\cos x$$
$$4\cdot\sin x=6\cdot\cos x$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını $6\cdot\sin x$'e bölersek $\cot x=2/3$ olduğunu buluruz.

Doğru cevap: A.

Teorem. *Tanımlı olan her* tan α *ve* cot α *için*
$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

Kanıt: İster tanjant ile kotanjantın yukarıda kanıtlanan değerlerini çarpın, isterseniz hiç bu teoremlere bulaşmadan tanımlarından gidin.
$$\tan\alpha=\frac{a}{b} \text{ ve } \cot\alpha=\frac{b}{a}$$
idi. Bu değerler çarpılırsa sonucun 1 çıkacağı ayan beyan ortada. Demek ki neymiş?
Aynı açı ölçüsünün tanjantı ile kotanjantı birbirlerinin çarpmaya göre tersleriymiş.

Örnek.
$$\left(\frac{1+\cos x}{\tan x}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\cot x}\right)$$
ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\sin^2 x$ D) $\cos^2 x$ E) $\tan x$

Çözüm: $\tan x\cdot\cot x = 1$ olduğunu biliyoruz. O halde sadece payları çarpalım:
$$(1+\cos x)\cdot(1-\cos x) = 1-\cos^2 x = \sin^2 x.$$
Doğru cevap: C.

Örnek. $\tan x + \cot x = 4$ *olduğuna göre*
$$\tan^2 x + \cot^2 x$$
toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: Verilen eşitliğin her iki yanının karesini alalım.
$$(\tan x + \cot x)^2 = 4^2$$
$$\tan^2 x + 2\cdot\tan x\cdot\cot x + \cot^2 x = 16$$
$\tan x\cdot\cot x = 1$ olduğundan,
$$\tan^2 x + \cot^2 x = 16 - 2 = 14$$
bulunur.
Doğru cevap A.

Örnek.
$$\frac{1}{\sin^2 A}-\frac{1}{\tan^2 A}$$
ifadesi aşağıdaki ifadelerden hangisiyle özdeştir?

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sin^2 A$ E) $\frac{1}{\sin^2 A}$

Çözüm:
$$\frac{1}{\sin^2 A}-\frac{1}{\tan^2 A}=\frac{1}{\sin^2 A}-\cot^2 A=\frac{1}{\sin^2 A}-\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}=1$$
olduğu görülmüş olur.
Doğru cevap: B.

Örnek. $\tan^2 x - 3\tan x - 7 = 0$ *olduğuna göre*
$$\tan^2 x - 21\cdot\cot x$$
ifadesinin değeri kaçtır?

A) 10 B) 13 C) 16 D) 21 E) 32

Çözüm: Eskiden bu sorular
'$x^2 - 3x + 7 = 0$ *olduğuna göre* $x^2-\frac{21}{x}$ *kaçtır?*'
diye sorulurdu, heeeey gidi günler hey!
Denklem çarpanlarına ayrılmadığından başka yollar düşünmemiz gerekiyor. $\tan^2 x = 3\tan x + 7$ eşitliğini kullanalım.
$$\tan^2 x-21\cot x=3\tan x+7-21\cot x$$
$$=3\tan x+7-\frac{21}{\tan x}$$
$$=\frac{3(3\tan x+7)+7\tan x-21}{\tan x}$$
$$=\frac{16\tan x}{\tan x}=16$$
Doğru cevap: C.

Örnek.
$$\frac{1+\tan 2x+\tan^2 2x}{1+\cot 2x+\cot^2 2x}$$
ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan x$ B) $\tan 2x$ C) $\cot 2x$ D) $\tan^2 2x$ E) $\cot^2 2x$

Çözüm: $\tan 2x = a$ denirse $\cot 2x=\frac{1}{a}$ olur. Şu durumda;
$$\frac{1+\tan 2x+\tan^2 2x}{1+\cot 2x+\cot^2 2x}=\frac{1+a+a^2}{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}=a^2$$
bulunur. $\tan 2x = a$ demiş olduğumuzdan cevap $\tan^2 2x$ olur.
Doğru cevap: D.

Teorem. *Her α reel sayısı için*

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Kanıt: Sekant ile kosinüsün tanımlarına bakarsak,

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ iken } \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

olduğunu görürüz. Demek ki uygun bir ölçünün sekantı gerçekten kosinüsünün çarpmaya göre tersiymiş.

Örnek.

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x$$

ifadesinin sadeleştirilmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) sin x B) cos x C) tan x D) cot x E) sec x

Çözüm: Önce kesirli ifadeyi sadeleştireceğiz. Paydasını (1 – sin x) ile çarpmak işi kolaylaştırır:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos x\cdot(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x\cdot(1-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \sec x - \tan x$$

olduğundan

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x = \sec x$$

bulunur. O halde

Doğru cevap E.

Örnek.

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) cot x B) 2cot x C) tan x D) 2tan x E) 4tan x

Çözüm: $\frac{\cos x}{1+\sin x} = \sec x - \tan x$ olduğunu bir önceki soruyu çözerek bulmuştuk, aynı şekilde

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \sec x + \tan x$$

olduğunu da bulabiliriz. Bulduğumuz bu değerleri sorulan ifadede yerlerine yazarsak, sonucu bulmuş olacağız.

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} = 2\cdot\tan x.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$(\sec x - \tan x)^2 = \frac{1-a}{1+a}$$

eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) sin x B) cos x C) tan x D) cot x E) csc x

Çözüm: Eşitliğin sol tarafıyla oynayalım bakalım:

$$(\sec x - \tan x)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x} = \frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

olur.

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-a}{1+a}$$

eşitliğinden a = sin x olduğu rahatlıkla görülebilir.

Doğru cevap: A.

Teorem. *Her α reel sayısı için*

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Kanıt: Sekant ile kosinüsün tanımlarına bakarsak,

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ iken } \csc\alpha = \frac{c}{a}$$

olduğunu görürüz.

Demek ki uygun bir ölçünün kosekantı gerçekten sinüsünün çarpmaya göre tersiymiş.

Bu noktada, bir durup soluklanalım. Olanları şöyle bir yorumlayalım:

Tanjant ve kotanjant oranları aslında sinüs ve kosinüsün birbirlerine oranıymış, sekant ve kosekant oranları da sinüs ve kosinüsün çarpmaya göre tersleriymiş. Anlayacağınız her şey dön dolaş sinüs ve kosinüse geliyor.

Buradan çıkan sonuç; sinüs ve kosinüsü adam gibi bilen birinin sırtının yere gelmeyeceğidir. Diğer dört oranın sadece tanımlarını bilin, yeter! İnanın bana…

Örnek.

$$\frac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x}$$

ifadesinin sadeleşmiş şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$
D) $\sin x + \cos x$ E) $\sin x - \cos x$

Çözüm: Her bir ifadenin eşitini yerine yazalım:

$$\frac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x}}{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}} = \sin x + \cos x$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$\cot x + \tan x = (2k + 5)\cdot\sec x\cdot\csc x$

eşitliğini doğru kılan k değeri kaçtır?

A) −2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Eşitliğin sol tarafını açalım:

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \csc x \cdot \sec x$$

olduğundan

$$2k + 5 = 1$$

olduğu anlaşılır. O halde $k = -2$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{a - 1}{a + 1}$$

eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\csc x$

Çözüm: Verilen eşitliğin sağ yanındaki −1 ve +1 sayılarından dolayı, eşitliğin sol yanının hem pay hem de paydasını $\sin x$'e bölesimiz geliyor.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\dfrac{1 - \sin x}{\sin x}}{\dfrac{1 + \sin x}{\sin x}} = \frac{\dfrac{1}{\sin x} - 1}{\dfrac{1}{\sin x} + 1} = \frac{\csc x - 1}{\csc x + 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$$

olduğundan $a = \csc x$'tir. O halde

Doğru cevap: E.

Teorem. *Tanımsızlık oluşturmayan her α reel sayısı için*

$\sin\alpha\cdot\csc\alpha = 1$ ve $\cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1$.

Kanıt: İster sinüs ile kosekantın ve kosinüs ile sekantın daha önce kanıtladığımız değerlerini çarpın, isterseniz hiç bu teoremlere bulaşmayın, tanımları kullanın.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ iken } \csc\alpha = \frac{c}{a}$$

idi. Bu değerler çarpılırsa sonucun 1 çıkacağı ayan beyan ortada. Benzer şekilde

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ iken } \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

idi. Bu değerler çarpılırsa sonuç tabii ki 1 çıkar.

Örnek.

$\sin x\cdot\tan x\cdot\sec x\cdot\cos x\cdot\cot x\cdot\csc x$

çarpımı bir reel sayıya eşitse o reel sayı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\sin^2 x$ D) $\sin^3 x$ E) $\sin^6 x$

Çözüm: İkili-ikili çarpacağız.

$\sin x\cdot\csc x = 1$
$\cos x\cdot\sec x = 1$
$\tan x\cdot\cot x = 1$

olduğundan hepsinin çarpımı 1'e eşittir.

Doğru cevap: B.

Teorem. $\tan\alpha$ *'nın tanımlı olduğu her* α *reel sayısı için*

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha\,.$$

Kanıt: Hemen bir dik üçgen çizip değerleri yerlerine yazabileceğiniz gibi daha önce kanıtladığımız teoremleri de kullanabiliriz. Biz diğer teoremleri kullanalım da devamlı hatırımızda kalsınlar.

$$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$$

Örnek.

$$1+2\sec^2x\tan^2x-\sec^4x-\tan^4x$$

kaça eşittir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Sorulan ifadeyi şöyle düzenleyelim:

$$1-(\sec^4x-2\sec^2x\tan^2x+\tan^4x)$$

$$1-(\sec^2x-\tan^2x)^2$$

Daha önce $\sec^2x-\tan^2x=1$ olduğunu bulmuştuk. O halde cevap 0 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x bir dar açı ölçüsü ve*

$$\frac{2-\cos^2x}{\cos^2x}=3\cdot\tan x$$

olduğuna göre cot *x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $1+\tan^2x=\sec^2x$ olduğunu kullanacağız.

$$\frac{2-\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{2}{\cos^2x}-1=2\cdot\sec^2x-1$$

$$=2\cdot(1+\tan^2x)-1$$

$$=2+2\cdot\tan^2x-1$$

$$=1+2\cdot\tan^2x$$

olur. Bu sayede verilen denklem de

$$1+2\cdot\tan^2x=3\cdot\tan x$$

halini alır. Yani $2\cdot\tan^2x-3\cdot\tan x+1=0$ olur. Hemen bu ifadeyi çarpanlarına ayıralım:

$$2\cdot\tan^2x-3\cdot\tan x+1=(2\cdot\tan x-1)\cdot(\tan x-1)$$

olduğundan

$$\tan x=1/2 \text{ veya } \tan x=1$$

olabileceğini anlarız. O halde

$$\cot x=2 \text{ veya } \cot x=1$$

olabilir. Demek ki alabileceği değerler toplamı 3'müş.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x bir dar açı ölçüsü ve*

$$2\cdot\sec^2x=3\cdot\tan x+1$$

olduğuna göre tan *x ifadesinin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $\sec^2x$ ile $\tan x$ arasında bir ilişki bulmamız lâzım. O ilişkiyi de biraz önce öğrendik.

$$2\cdot\sec^2x=3\cdot\tan x+1$$

$$2\cdot(1+\tan^2x)=3\cdot\tan x+1$$

$$2+2\cdot\tan^2x=3\cdot\tan x+1$$

$$2\cdot\tan^2x-3\cdot\tan x+1=0$$

Görüldüğü üzere bulduğumuz denklem aradığımız tan *x*'e bağlı. Bu durumda kökler toplamı formülünden tan *x*'in alabileceği değerler toplamının $\frac{3}{2}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru cevap: C.

Teorem. $\cot\alpha$ *'nın tanımlı olduğu her* α *reel sayısı için*

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha\,.$$

Kanıt: Yine daha önce bulduğumuz sonuçları kullanacağız.

$$1+\cot^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$=\csc^2\alpha.$$

Örnek. *x bir dar açı ölçüsü ve*

$$4\csc^2x=3\cot x+8$$

olduğuna göre cot *x ifadesinin alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?*

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Biraz önce öğrendiğimiz $\csc^2x$ ile $\cot x$ arasındaki ilişkiyi kullanacağız.

$$4\csc^2 x = 3\cot x + 8$$
$$4(1 + \cot^2 x) = 3\cot x + 8$$
$$4 + 4\cot^2 x = 3\cot x + 8$$
$$4\cot^2 x - 3\cot x - 4 = 0$$

Görüldüğü üzere, bulduğumuz denklem zaten aradığımız cot x'e bağlı. Bu durumda kökler çarpımı formülünden cot x'in alabileceği değerler çarpımının -1 olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *olmak üzere*

$$\tan x + \sin x = m$$
$$\tan x - \sin x = n$$

eşitliklerini sağlayan m ve n değerleri arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m^2 + n^2 = mn$ B) $(m+n)^2 = mn$

C) $m^2 - n^2 = 4mn$ D) $(m-n)^2 = 4mn$

E) $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

Çözüm: Verilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\tan x = \frac{m+n}{2},$$

taraf tarafa çıkarırsak da

$$\sin x = \frac{m-n}{2}$$

buluruz. Diğer yandan, bu bulduklarımızı daha önce bulduğumuz

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

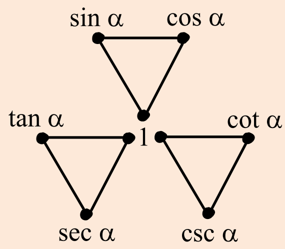
eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$\left(\frac{2}{m-n}\right)^2 - \left(\frac{2}{m+n}\right)^2 = 1$$
$$\frac{4}{(m-n)^2} - \frac{4}{(m+n)^2} = 1$$
$$\frac{4(m+n)^2 - 4(m-n)^2}{(m^2-n^2)^2} = 1$$
$$\frac{16mn}{(m^2-n^2)^2} = 1$$
$$(m^2-n^2)^2 = 16mn$$
$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Bir postada 30 formül. Aşağıda bazı trigonometrik eşitlikleri ezberlemenin pratik bir yolunu bulacaksınız.



Kural 1. *Komşu olmayan iki köşenin çarpımı ortadakini verir.*

sin α·sec α = tan α,
tan α·csc α = sec α,
sec α·cot α = csc α,
csc α·cos α = cot α,
cot α·sin α = cos α,
cos α·tan α = sin α,
sin α·csc α = 1,
tan α·cot α = 1,
sec α·cos α = 1.

Kural 2. *Herhangi bir köşenin bir komşusuna bölümü, diğer komşusunu verir.*

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha, \quad \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha} = \sin\alpha,$$
$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} = \cos\alpha, \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha,$$
$$\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha} = \sin\alpha, \quad \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} = \sec\alpha,$$
$$\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \tan\alpha, \quad \frac{\sec\alpha}{\tan\alpha} = \csc\alpha,$$
$$\frac{\csc\alpha}{\cot\alpha} = \sec\alpha, \quad \frac{\csc\alpha}{\sec\alpha} = \cot\alpha,$$
$$\frac{\cot\alpha}{\cos\alpha} = \csc\alpha, \quad \frac{\cot\alpha}{\csc\alpha} = \cos\alpha,$$
$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha, \quad \frac{1}{\sec\alpha} = \cos\alpha,$$
$$\frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha, \quad \frac{1}{\csc\alpha} = \sin\alpha,$$
$$\frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha, \quad \frac{1}{\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

Kural 3. *Üçgenlerin üst köşelerinin kareleri toplamı, alt köşesinin karesini verir.*

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^2$,
$\tan^2\alpha + 1^2 = \sec^2\alpha$,
$1^2 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$.

CEVAPLI TEST

1.

$$\frac{4+\sin^2 x}{5-\cos^2 x}$$

oranı kaça eşittir?

A) 2 B) 1 C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) -1

2.

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{5}{4}$$

olduğunda tan *x* ifadesi kaça eşittir?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

3.

$$\left(\frac{1+\sin x}{\cot x}\right)\cdot\left(\frac{1-\sin x}{\tan x}\right)$$

çarpımın özdeşi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\sin^2 x$ D) $\cos^2 x$ E) $\tan^2 x$

4.
$\sin x + \cos x = 0$ iken

$$\sin x\cdot\cos x$$

çarpımı kaça eşit olur?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

5.
$\tan x + \cot x = 3$ iken

$$\tan^2 x + \cot^2 x$$

toplamı kaça eşit olur?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

6.
α bir dar açı ölçüsü olmak üzere

$$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha$$

farkı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sin^2\alpha$ E) $\cos^2\alpha$

7.
Aşağıdaki ifadelerden hangisi

$$\sec x\cdot\cos x+\tan^2 x$$

ifadesiyle özdeştir?

A) $\sec^2 x$ B) $\csc^2 x$ C) $\sin^2 x$ D) $\cos^2 x$ E) $\csc^2 x$

8.

$$\frac{\tan x+\cot x}{\sec x\cdot\csc x}$$

ifadesi tanımlı olduğu değerler için kaça eşittir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

9.
Aşağıdaki ifadelerden hangisi

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

ifadesiyle özdeştir?

A) $\tan x$ B) $\cot x$ C) $2\cdot\cos x$ D) $2\cdot\cot x$ E) $2\cdot\tan x$

10.

$$\frac{\csc x-1}{\csc x+1}=\frac{1-m}{1+m}$$

özdeşliğini doğrulayan *m* değeri neye eşittir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $-\sin x$ D) $-\cos x$ E) $-\csc x$

1. B **2.** E **3.** D **4.** B **5.** C **6.** B **7.** A **8.** C **9.** E **10.** A