

Analiz Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Fonksiyonların Limiti

Okuduğunuz bu satırların yazarının, yani ben-denizin, Ocak ayının 13'ünde ama 4 yıl arayla doğmuş iki kızı var: Büyüğünün adı Neslihan, küçüğünün adı da Ceylin. Anlayacağınız Ceylin doğduğunda Neslihan'ın doğum yıldönümüydü. Her ne kadar Neslihan o gün "Ben ondan 5 yaş büyüğüm! Çünkü ben bugün 5'e girdim, o daha 0 yaşında!" dese bile yaşları farkı hep 4 olacak. Hem de tamı tamına 4. Çünkü aynı gün doğdular.

Lafı şuraya getireceğim: Yaşları farkının hep sabit kalacağını biliyoruz, peki yaşları oranı n'olacak? Bu arada, hani derler ya "Hiç ölmeyecekmiş gibi bu dünya için, yarın ölecekmiş gibi ahiret için çalışın!" diye, siz de bu problemi kızlarım hiç ölmeyeceklermiş gibi çözün.

[2008/MY:] Şu an Neslihan 5 yaşında, Ceylin ise 1 yaşında olduğundan $N/C = 5$ ve $C/N = 1/5$. Peki gelecek sene bu oranlar değişecek mi? Bakalım: İsimlerini sırasıyla N ve C ile gösterirsek, gelecek sene Neslihan 6, Ceylin ise 2 yaşında olacağından N/C oranı 3'e düşecek, C/N oranıysa $1/3$ 'e çıkacak. Ondan 1 sene sonra ise N/C oranı $7/3$ 'e düşecek, C/N oranıysa $3/7$ 'ye çıkacak. N/C oranının devamlı azalacağını, C/N oranının devamlı artacağını anlamış olmalısınız. Peki bu oranlar bir yerde birleşecekler mi? Birleşeceklerse nerede? Birleşmeyeceklerse neden? Bunu inceleyeceğiz. N/C ve C/N oranlarının (2008 yılına göre) yıllar geçtikçe alacağı değerleri yaklaşık olarak gösteren bir tablo yapalım.

	1 Yıl sonra	2 Yıl sonra	3 Yıl sonra	10 yıl sonra	20 yıl sonra	50 yıl sonra
N/C	3.000	2.333	2.000	1.363	1.190	1.078
C/N	0.200	0.428	0.500	0.733	0.840	0.927

Biraz da abartalım:

100 yıl sonra $N/C = 1.039$, $C/N = 0.961$

500 yıl sonra $N/C = 1.007$, $C/N = 0.992$

Fark etmiş olmalısınız: N/C oranı 1'den büyük her sayıyı aşır azalarak 1'e yaklaşıyor, C/N oranıysa 1'den küçük her sayıyı aşır artarak 1'e yaklaşıyor. Peki iki orandan biri herhangi bir zaman 1 olabilir mi? Tabii ki hayır, çünkü oranın 1 olması "Öyle bir gün gelecek ki iki kızım da aynı yaşta olacak" demek. Bu da mümkün değil!

Dikkat ettiyseniz, bahsi geçen oranlar 1 olmasalar bile, 1'e çok çok yaklaşıyorlar. İşte biz bu durumda matematikte, N/C oranının limiti 1'dir deriz. Hatta C/N oranının da limiti 1'dir.

Biz burada bu hikâyeyle, aslında *dizilerin limiti* için bir sezgi vermeye çalıştık. Çünkü yaş problemlerinde de insanların yaşları sayma sayısı alınır, (a_n) dizisindeki n de!

N/C oranı günümüzden x yıl sonra $\frac{5+x}{1+x}$ olacağından, bu oranın x sınırsız büyüdükçe 1'e yaklaştığını

$$\left(\frac{5+x}{1+x}\right) \rightarrow 1$$

yazarak, benzer şekilde x yıl sonra C/N oranı $\frac{1+x}{5+x}$ olacağından, bu oranın x sınırsız büyüdükçe 1'e yaklaştığını

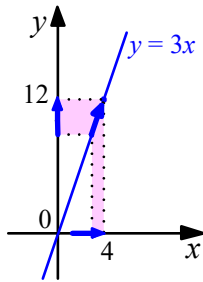
$$\left(\frac{1+x}{5+x}\right) \rightarrow 1$$

yazarak göstereceğiz.

Şimdi bir an için, insanların yaşlarının tam sayı olmayabileceğini de farz edelim. Yani 3,5 yıl sonra, 4,234 yıl sonra, $\sqrt{13}$ yıl sonra veya 0.133 yıl önce de bu oranı merak ettik diyelim. O halde işlerimizi dizi ile değil de reel sayılarda tanımlanmış bir fonksiyonla yapmalıyız. Bu sayede dizi olmayan fonksiyonların da x (yani değişken) sonsuza giderken limitini bulabileceğimiz gibi, x herhangi bir reel sayıya giderken de limitini bulabileceğiz. Bunu da buna uygun bir fonksiyon ile izah edelim.

Örneğin, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ fonksiyonunu ele alalım. x sayısı 4'e yaklaşırken $f(x)$ 'in kaçta yaklaştığını bulacağız. Tahmini zor olmasa gerek ama biz yine de bakalım. Tabii x 'e nereden yaklaştığımız da önemli. 4'ten küçük sayılardan artarak da olabilir, 4'ten büyük sayılardan azalarak da... Önce 4'ten küçük sayılardan, arta arta 4'e yaklaşalım bakalım:

$$\begin{aligned} x = 3,8 \text{ iken } y = f(3,8) &= 3 \cdot (3,8) = 11,4 \\ x = 3,9 \text{ iken } y = f(3,9) &= 3 \cdot (3,9) = 11,7 \\ x = 3,95 \text{ iken } y = f(3,95) &= 3 \cdot (3,95) = 11,85 \\ x = 3,99 \text{ iken } y = f(3,99) &= 3 \cdot (3,99) = 11,97 \\ x = 3,999 \text{ iken } y = f(3,999) &= 3 \cdot (3,999) = 11,997 \end{aligned}$$

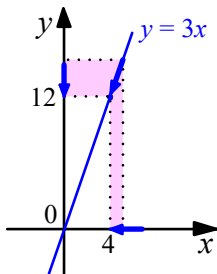


Görüldüğü üzere x , 4'e yaklaşırken y değeri âyan beyan 12'ye yaklaşıyor. Bu durumu artık

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 12$$

yazarak göstereceğiz. 4'ün üzerindeki “-” işareti 4'e sayı doğrusu üzerinde sol taraftan yani 4'ten daha küçük sayılardan yaklaştığımızı anlatmaya çalışır. Bir de 4'e, 4'ten daha büyük sayılardan azala azala yaklaşalım bakalım:

$$\begin{aligned} x = 4,2 \text{ iken } y = f(4,2) &= 3 \cdot (4,2) = 12,6 \\ x = 4,1 \text{ iken } y = f(4,1) &= 3 \cdot (4,1) = 12,3 \\ x = 4,05 \text{ iken } y = f(4,05) &= 3 \cdot (4,05) = 12,15 \\ x = 4,01 \text{ iken } y = f(4,01) &= 3 \cdot (4,01) = 12,03 \\ x = 4,001 \text{ iken } y = f(4,001) &= 3 \cdot (4,001) = 12,003 \end{aligned}$$



Görüldüğü üzere, x , 4'e sağdan yani 4'ten daha büyük sayılardan yaklaşırken y yine âyan beyan 12'ye yaklaşıyor. Bu durumu da artık

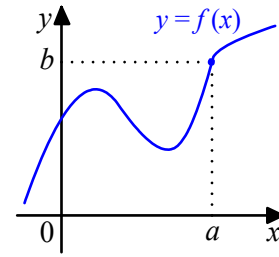
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 12$$

yazarak göstereceğiz.

Burada 4'ün üzerindeki “+” işareti de 4'e sayı doğrusunda sağ taraftan yaklaştığımızı anlatır.

İşte burada olduğu gibi, x herhangi bir sayıya sol-dan veya sağdan yaklaşırken y 'nin yaklaştığı sayı aynı reel sayıysa, fonksiyonun o noktada limiti vardır denir ve limit değeri y 'nin yaklaştığı reel sayıdır.

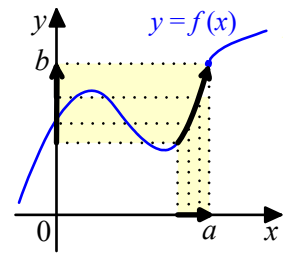
Limit hesaplamalarında fonksiyonun grafiğini düşünmek çoğu zaman çok faydalıdır. Neyi düşünmemiz gerektiğini anlatayım: Örneğin, aşağıda belli bir aralıkta grafiği çizilmiş, (a, b) noktasından geçen terbiyeli bir f fonksiyonunun a noktasındaki limitini bulmaya çalışalım. Alengirli fonksiyonları ileride çalışacağız.



Elinizi fonksiyon grafiğinin üzerine koyun ve grafik üzerinde sol taraftan sağ tarafa doğru hareket ettirin. Eliniz fonksiyon üzerinde a apsisli noktaya yani (a, b) noktasına doğru giderken, üzerinden geçtiğiniz noktaların ordinatlarının siz tam o noktaya yaklaşırken kaçta doğru yaklaştığına bakın.

Göreceksiniz ki, (a, b) noktasına yaklaştıkça, ordinatlarda b 'ye yaklaşıyor. Gönül rahatlığıyla söyleyebilirsiniz ki

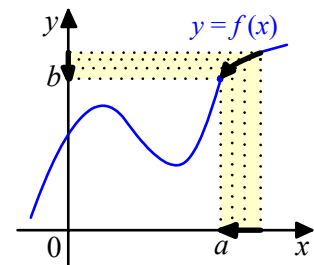
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \text{ 'dir.}$$



Şimdi de sağ taraftan sol tarafa yaklaşalım.

Yine göreceksiniz ki, grafiğin sağ tarafından (a, b) noktasına yaklaşırken, üzerinden geçtiğiniz noktaların ordinatları azalarak b 'ye doğru gidiyor. O halde

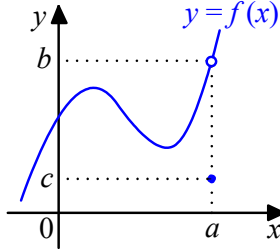
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \text{ 'dir.}$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

olduğundan da $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 'dir.

Dikkat ettiyseniz, limiti belirlerken hiç $f(a) = b$ mi değil mi diye ilgilenmiyoruz. Yani, grafik

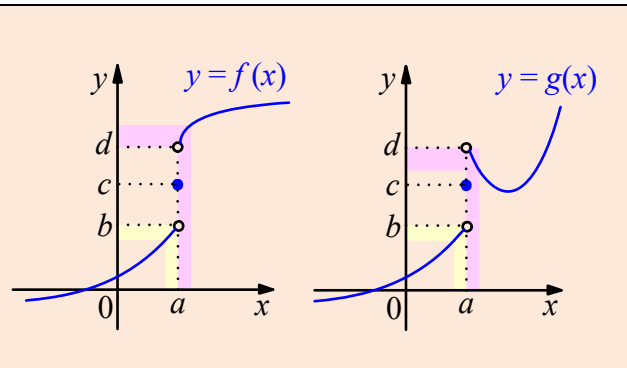


şeklinde olsaydı da $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ olacaktı. Fonksiyon a 'da tanımsız ya da b dışında başka bir sayı olarak tanımlı olsaydı bile!

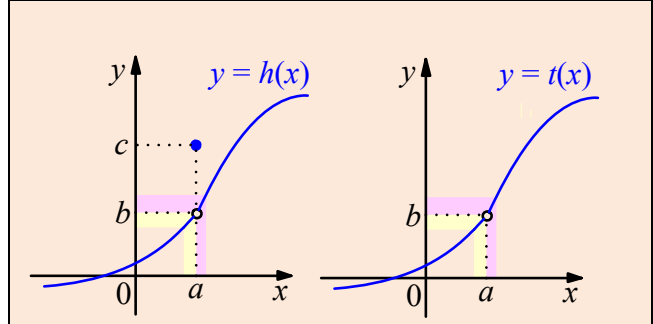
Bir fonksiyonun belirli bir a reel sayısında bir görüntüye sahip olması ya da olmaması fonksiyonun o noktadaki limitini etkilemez.

Çünkü, limit kavramı fonksiyonun o noktada ne yaptığını değil o noktanın civarında ne yaptığını inceler. Bu yüzden o noktada değil, o noktanın civarında tanımlı olması yeter.

Burada, *civarında tanımlı* olmasından kasıt, ne kadar küçük seçilirse seçilsin, pozitif bir ϵ sayısı için fonksiyonun $(a - \epsilon, a)$ ve $(a, a + \epsilon)$ aralıklarında tanımlı olmasıdır.



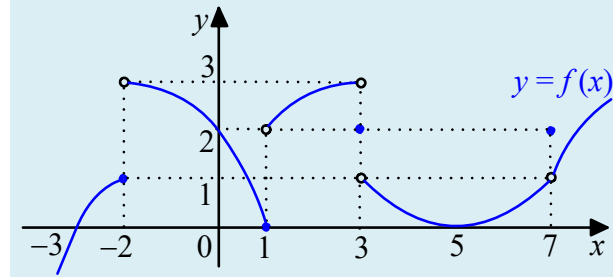
Örneğin, \mathbb{R} 'de tanımlı yukarıdaki $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının ikisinde de a 'da sol limit b iken, a 'da sağ limit d 'dir. Görüntünün c olmasının hiçbir önemi yoktur!



Örneğin, \mathbb{R} 'de tanımlı yukarıdaki $y = h(x)$ ve $\mathbb{R} - \{a\}$ 'da tanımlı yukarıdaki $y = t(x)$ fonksiyonlarının ikisinde de a 'da sol limit de sağ limit de b 'dir. Dolayısıyla a 'da limit b 'dir. Görüntünün var olup olmasının hiçbir önemi yoktur!

Ufak ufak çözümlü örneklerle geçelim:

Örnek.



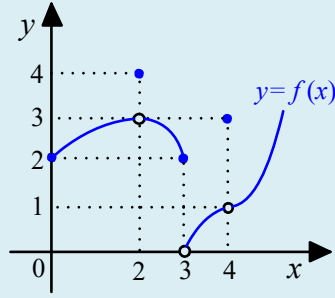
Yukarıda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun $-3, -2, 0, 1, 3, 5, 7$ noktalarındaki limitlerini varsa bulalım.

Çözüm: Konu başındaki örnekler her zaman en önemli örneklerdir. İyice inceleyiniz.

- ✓ $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0,$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ yok,
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2,$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ yok,
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 \wedge \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ yok,
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0,$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 1$

Örnek.

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu grafiğe göre 2, 3, 4 değerlerinden bazıları için var olan limitlerin toplamı kaçtır?



- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: İncelemeye fonksiyonun 2 apsisi noktasından başlayalım:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

olur. Şimdi de 3 apsisi noktada incelememizi yapalım:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \text{ ama } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$$

olduğundan, yani $x = 3$ noktasında soldan limit değeriyle sağdan limit değeri eşit olmadığından 3 apsisi noktada limit yoktur.

Geldik 4 apsisi noktaya:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1$$

olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$$

bulunur. O halde var olan limitler toplamı $3 + 1$ yani 4'tür.

Doğru cevap: A.

Sonsuza İraksama

x belli bir a reel sayısına soldan ve sağdan yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu da belli bir b reel sayısına yaklaşıyorsa, b 'ye f fonksiyonunun a 'daki limiti dendiğini öğrenmiş ve bu durumu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

yazarak göstermiştik.

Yalnız bazen bazı fonksiyonlar, x sabit bir sayıya yaklaşmasına rağmen, bir sabit sayıya yaklaşmazlar. Devamlı büyür ya da küçülürler, sınır tanımadan! Böyle bir durumda, fonksiyonların o noktada limitleri yoktur deriz.

Yalnız, limitin olmamasının neyden kaynaklandığını da anlamak ve kolayca anlatmak da isteriz.

İşte bu yüzden, bir fonksiyonunun bir noktadan sonra veya bir nokta civarında sınırsız olarak büyüdüğünü veya küçüldüğünü kolayca anlatmak için, limitine verilecek bir sembole ihtiyaç duyarız. Bu semboller, eşitsizlikler dersinden de bildiğiniz üzere $+\infty$ ve $-\infty$ sembolleridir. Unutmayın ki, bu semboller birer reel sayı değildir. Reel sayı olmalarına rağmen, derdimizi karşılıkine çok rahat anlatma olanağı sunduklarından bu sembolleri reel sayılar kümesine eklemek kaçınılmaz olmuştur.

Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesi

Her x reel sayısı için $-\infty < x < +\infty$ eşitsizliklerinin sağlandığını biliyoruz. Şimdi, $-\infty$ ve $+\infty$ sembollerini reel sayılara dâhil ederek reel sayılar kümesini genişleteceğiz. Adına da **genişletilmiş reel sayılar kümesi** diyerek, $\overline{\mathbb{R}}$ ile göstereceğiz. Yani;

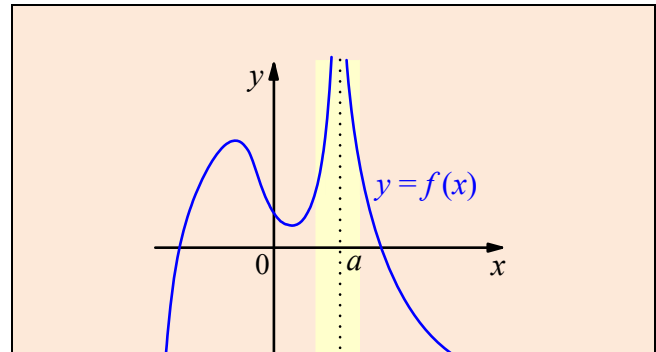
$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

Önemli not: Bir noktada limitin var olabilmesi için limitin mutlaka bir reel olması gerekir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ veya } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

ifadeleri limitin $+\infty$ veya $-\infty$ olduğunu söylemez, sadece x , a değerine yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun $+\infty$ 'a gittiğini veya $-\infty$ 'a gittiğini (yani sınır tanımaksızın büyüdüğünü veya küçüldüğünü) anlatmaya yarar. Anlayacağınız burada bir 'yaklaşma'dan değil, olsa olsa 'uzaklaşma'dan bahsedilebilir.

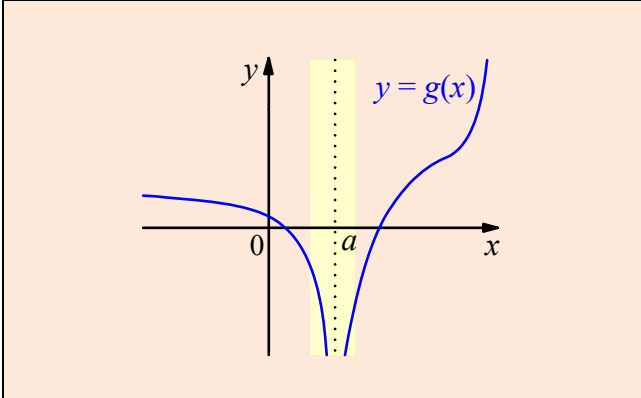
Şimdi bu sembolleri hangi durumda kullanacağımıza dair örnekler vereceğiz:



$\mathbb{R} - \{a\}$ 'da tanımlı yukarıdaki $y = f(x)$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

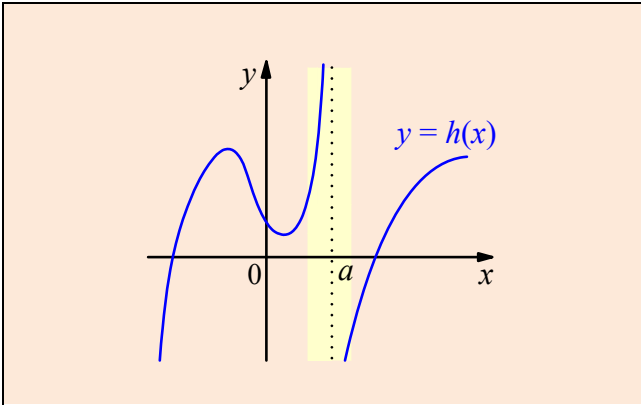
olduğundan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ yazılır.



$\mathbb{R} - \{a\}$ 'da tanımlı yukarıdaki $y = g(x)$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$$

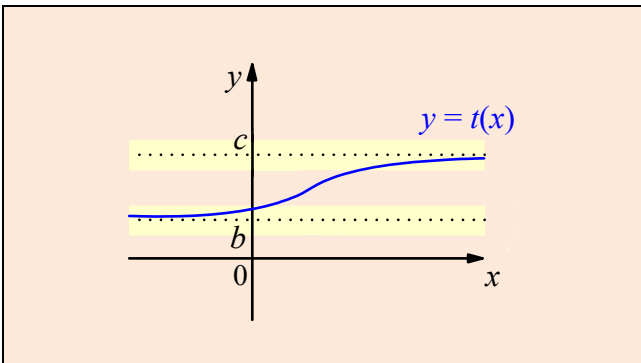
olduğundan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ yazılır.



$\mathbb{R} - \{a\}$ 'da tanımlı yukarıdaki $y = h(x)$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = +\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = -\infty$$

olduğundan $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ yoktur!



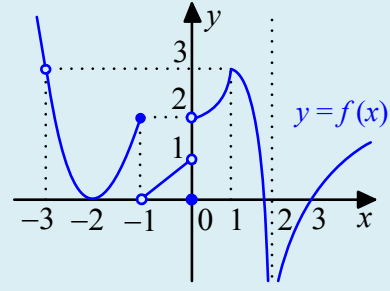
\mathbb{R} 'de tanımlanmış yukarıdaki $y = t(x)$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} t(x) = b \text{ ve } \lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = c$$

olur!

Şimdi çözümlü örneklere geçelim.

Örnek.



Yukarıda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kaç farklı noktada limiti yoktur?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: -1 ve 0 apsisli noktalarda sol ve sağ limitler birbirine eşit olmadığı için, 2 apsisli noktada da limit bir reel sayı olmadığı için $(-\infty)$ cevabımız 3 olmalıdır.

Doğru Cevap: B.

Örnek. Yanda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki önermelerden kaçı doğrudur?

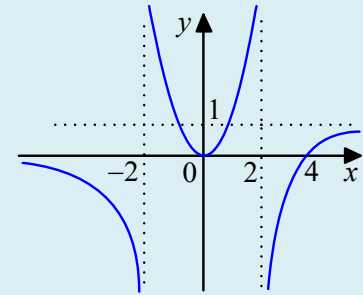
I. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

II. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

III. $\lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) = +\infty$

IV. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

V. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: x 'ler -2 'ye soldan sınırsızca yaklaştıkça y 'ler sınırsızca azalmakta, -2 'ye sağdan sınırsızca yaklaşırken de y 'ler sınırsızca artmaktadır. Bu yüzden I ve II doğrudur.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) = +\infty$ olur, bu yüzden III önermesi de doğrudur.

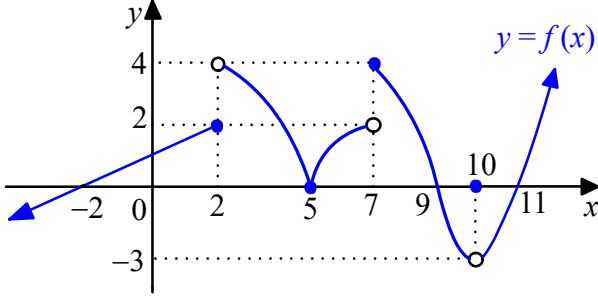
x 'ler sınırsızca büyürken y 'lerin gitgide 1 'e yaklaştığı görüldüğünden IV de doğrudur.

x 'ler sınırsızca küçülürken y 'lerin gitgide 0 'a yaklaştığı görüldüğünden V de doğrudur.

Doğru Cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

Aşağıdaki 10 soruyu bu grafiği dikkate alarak çö-
zünüz.



Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu $(-\infty, 2]$ aralığında doğrusal, diğer aralıklarda da grafikte gösterildiği gibi davranmaktadır.

1. f fonksiyonu için aşağıdaki bilgilerden hangisi söylenemez?

- A) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
C) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$ D) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 0$
E) $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 0$

2. Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonunda limitin -3 olduğu en az kaç nokta vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

4. Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x)$$

ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

5. Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 11} f(x)$$

ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

- A) -3 B) 0 C) 2 D) 3 E) Yoktur

6. Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonunun limitinin 0 olduğu farklı nokta sayısı en az kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. Yukarıda grafiği verilmiş f fonksiyonunun hangi noktasında limit vardır ama o noktadaki görüntüsünden farklıdır?

- A) -2 B) 2 C) 5 D) 7 E) 10

8. Yukarıda grafiği verilmiş f fonksiyonunun 2, 7 ve 10 noktalarındaki sağdan limitlerinin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) 2 C) 5 D) 7 E) 10

9. Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu hiçbir aralıkta **sabit olmadığına göre**

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) + \lim_{x \rightarrow 6} f(x)$$

toplamı kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10. Yukarıda grafiği verilmiş olan f fonksiyonunun limitinin var olmadığı farklı nokta sayısı en az kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

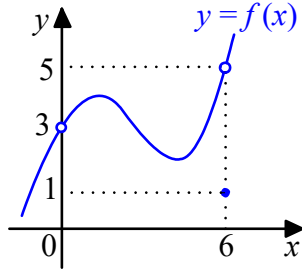
1. E 2. B 3. C 4. D 5. A 6. D 7. E 8. C 9. C 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

Yanda $\mathbb{R}-\{0\}$ 'da tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği görülmektedir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



A) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$

B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$

C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

D) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$

E) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 1$

2.

Yandaki grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre

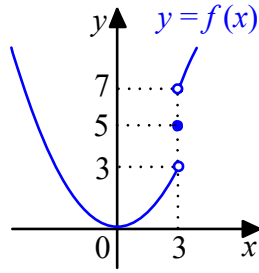
I. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3$

II. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 7$

III. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$

önergelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) Hepsi



3.

Yandaki grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir.

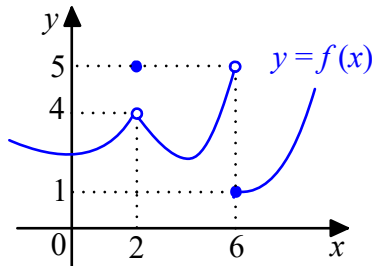
$$a = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 6} f(x)$$

$$c = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$$

olduğuna göre $a + b - c$ toplamı kaç eşittir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

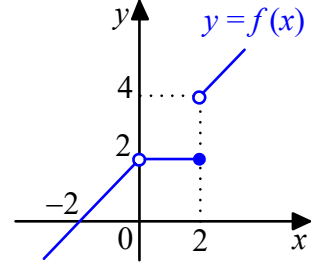


4.

Yanda $\mathbb{R}-\{0\}$ 'da tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği görülmektedir.

Bu fonksiyonun limitinin var olmadığı tek noktanın apsisi a olduğuna göre aşağıdaki noktaların hangisinde limit değeri a 'dır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3



5.

Yanda $\mathbb{R}-\{0,2\}$ 'de tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği görülmektedir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

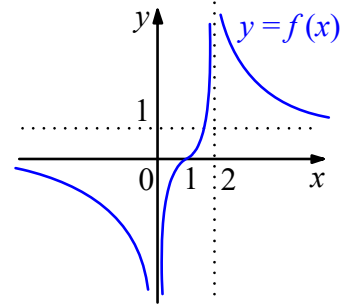
A) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

E) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$



6.

Yanda $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ 'da tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği görülmektedir.

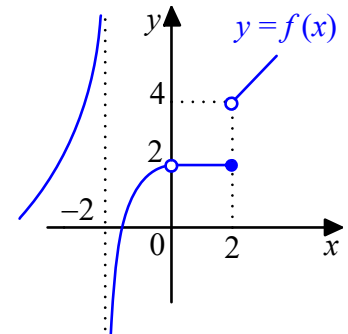
I. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

II. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

III. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

önergelerinden hangisi doğrudur?

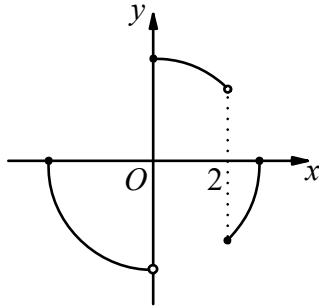
- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) Hepsi



1. E 2. D 3. A 4. C 5. D 6. A

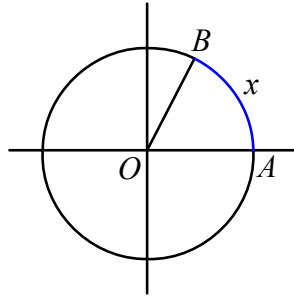
CEVAPLI TEST 3

1. Grafiği $x^2 + y^2 = 8$ çemberinin yaylarından oluşan yandaki f fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ değeri kaçtır?



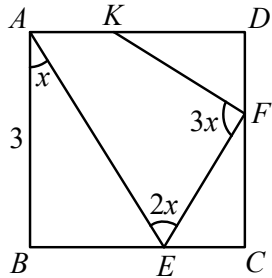
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

2. Yandaki merkezli çemberin yarıçapı 2 br olup AB yayının uzunluğu x br dir. Buna göre $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(AOB)$ kaçtır?



- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

3. $ABCD$ bir kare $m(\angle BAE) = x$ $m(\angle AEF) = 2x$ $m(\angle EFK) = 3x$ $|AB| = 3$ br olduğuna göre $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} |AK|$ kaçtır?

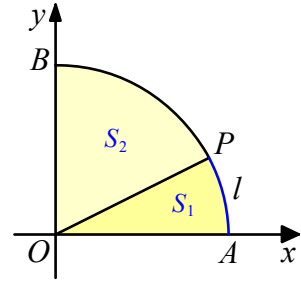


- A) $12 - 6\sqrt{3}$ B) $9 - 3\sqrt{3}$ C) $6 - 3\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3} - 9$ E) $8\sqrt{3} - 12$

4. Şekildeki O merkezli çeyrek birim dairede AOP ve POB daire dilimlerinin alanları sırasıyla S_1 ve S_2 br² dir. AP yayının uzunluğu da l br dir. Buna göre

$$\lim_{l \rightarrow \frac{\pi}{20}} \frac{S_2}{S_1} \text{ kaçtır?}$$

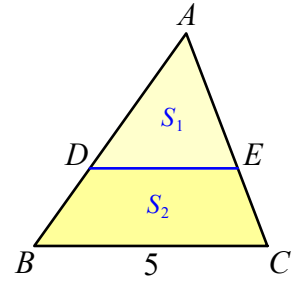
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



5. ABC bir üçgen $D \in [AB]$ $E \in [AC]$ $DE \parallel BC$ $|BC| = 5$ br $|ADE| = S_1$ br² $|DBCE| = S_2$ br² olduğuna göre

$$\lim_{|DE| \rightarrow 3} \frac{S_1}{S_2} \text{ kaçtır?}$$

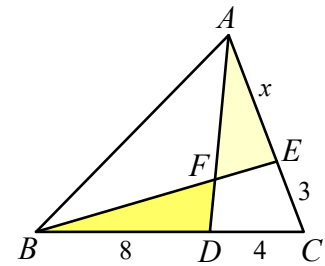
- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{9}{25}$ E) $\frac{16}{25}$



6. ABC bir üçgen $D \in [BC]$ $E \in [AC]$ $BE \cap AD = \{F\}$ $|BD| = 8$ br $|DC| = 4$ br $|CE| = 3$ br $|EA| = x$ br

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|AFE|}{|FBD|} = 1 \text{ olduğuna göre } a \text{ kaçtır?}$$

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



1. A 2. C 3. A 4. D 5. C 6. B